UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO E A APRENDIZAGEM DA ANÁLISE NUMÉRICA NUM CONTEXTO DE ACTIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO

Ana Cláudia Correia Batalha Henriques

DOUTORAMENTO EM EDUCAÇÃO

(DIDÁCTICA DA MATEMÁTICA)

2010

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO E A APRENDIZAGEM DA ANÁLISE NUMÉRICA NUM CONTEXTO DE ACTIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO

Ana Cláudia Correia Batalha Henriques

Tese orientada pelo Prof. Doutor João Pedro Mendes da Ponte

DOUTORAMENTO EM EDUCAÇÃO

(DIDÁCTICA DA MATEMÁTICA)

2010

Resumo

O presente estudo analisa os processos de raciocínio que os alunos do ensino superior usam na resolução de problemas e na realização de actividades de investigação na disciplina de Análise Numérica e de que forma isso contribui para a sua aprendizagem de conceitos e procedimentos nesta disciplina.

No quadro teórico abordo três temas essenciais para o desenvolvimento do estudo: (i) pensamento matemático avançado; (ii) problemas e actividades de investigação; e (iii) representações matemáticas.

O estudo segue uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa, baseada em estudos de caso e integrando uma vertente de experiência de ensino. Os participantes são os alunos do 2.º ano dos mestrados integrados conferidos pela Escola Naval. Entre estes são seleccionados três alunos – Carlos, Gonçalo e Luís – que são objecto de três estudos de caso. A experiência de ensino, que constitui o ponto de referência central do estudo tem por base a realização de tarefas de investigação, ao longo de um semestre lectivo, na disciplina de Análise Numérica. A recolha de dados inclui a observação dos alunos na realização de tarefas de investigação, os seus relatórios escritos, o registo áudio das entrevistas individuais realizadas aos alunos objecto de estudos de caso e inquéritos aplicados a todos os participantes.

Deste estudo é possível concluir que a realização das tarefas de investigação propostas aos alunos durante a experiência de ensino permite a exploração de uma grande diversidade de temas do programa da Análise Numérica e fornece oportunidades para os alunos: (i) usarem diferentes tipos de representações matemáticas, tornando-se progressivamente mais proficientes no seu uso; (ii) contactarem com os processos matemáticos típicos das actividades de investigação e da resolução de problemas e tornarem-se mais confiantes no seu trabalho; e (iii) assumirem um papel activo no seu processo de aprendizagem. Os resultados do estudo conduzem, ainda, a uma avaliação positiva do papel que as actividades de investigação podem desempenhar na aprendizagem dos alunos, nomeadamente em Análise Numérica, neste nível de ensino e sugerem a possibilidade da sua integração na sala de aula, como metodologia alternativa à convencional.

Palavras-chave: Actividades de investigação, Raciocínio matemático, Pensamento matemático avançado, Análise Numérica, Resolução de problemas.

Abstract

This study analyzes the reasoning processes that university students use when solving problems and carrying out investigation activities in a Numerical Analysis course and how it contributes to their learning of concepts and procedures of the course.

The theoretical framework of the study addresses three key issues for the development of the study: (i) advanced mathematical thinking, (ii) problems and investigation activities, and (iii) mathematical representations.

The study stands on a qualitative and interpretative methodology based on case studies and incorporating a teaching experience. The participants are the 2nd year students of Naval Academy. Among these, three students are selected - Carlos, Gonçalo and Luís - which are the subject of three case studies. The teaching experiment, which is the central reference point for this study is based on the realization of investigation tasks during a semester in a Numerical Analysis course. Data collection methods include participant observation, audio tape recording of the individual interviews to the cases, the written reports produced by students and questionnaires applied to all participants.

The results of this study show that the investigation tasks proposed to the students during the teaching experience allows the exploration of a wide variety of Numerical Analysis programmatic topics and provide opportunities for students: (i) use different types of mathematical representations and progressively becoming more proficient in their use; (ii) contact with the typical processes of mathematical investigations; and (iii) take/have an active role in the learning process. The results of this study also seem to confirm that the use of investigation activities has several potentialities in the students' learning, particularly in numerical analysis at this level of studies and suggest the possibility of their integration in the classroom as an alternative teaching methodology.

KeyWords: Investigation activities, Mathematical reasoning, Advanced mathematical thinking, Numerical Analysis, Problem solving.

Agradecimentos

No final deste longo percurso quero deixar presente o meu mais sincero agradecimento a todas as pessoas e instituições que tornaram possível e colaboraram na realização deste trabalho.

O meu profundo agradecimento ao Prof. Doutor João Pedro da Ponte pelo seu interesse e apoio na orientação deste trabalho. As suas preciosas sugestões e críticas pertinentes, os seus ensinamentos, as suas palavras de incentivo e, sobretudo, a constante disponibilidade manifestada para me acompanhar neste trabalho, foram essenciais para a sua realização. Agradeço, ainda, a sua amizade, presente em todos os momentos, dando-me a confiança e a tranquilidade necessárias em toda esta trajectória.

Agradeço à Escola Naval, que acreditou e investiu na formação docente, por me ter possibilitado as condições necessárias à realização deste estudo.

Aos alunos dos cursos Comandante Nunes Ribeiro e D. Rodrigo de Sousa Coutinho, da Escola Naval, que gentil e desinteressadamente se disponibilizaram a participar neste trabalho de investigação, o meu muito obrigado.

Aos colegas que ao longo de vários seminários, reuniões de projecto e conversas informais aceitaram falar sobre a investigação, contribuindo para uma reflexão mais profunda e profícua das suas questões e da análise dos dados empíricos, o meu agradecimento.

Agradeço especialmente ao Nuno pelo apoio durante todos estes anos de estudo, compreendendo a minha ausência em muitos momentos em família e em encontros com os amigos, suportando as minhas ansiedades e os altos e baixos do meu estado de humor.

Finalmente, agradeço o apoio da Fundação para a Ciência e a Tecnologia – MCTES que concedeu uma bolsa para a realização deste doutoramento (contracto SFRH/BD/38919/2007).

Índice

Índice de Quadros

Índice de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo faço uma breve introdução ao trabalho de investigação que me proponho realizar. Apresento os principais factores que motivam a realização deste estudo, enquadrando na sua problemática e descrevo, de modo sucinto, a sua pertinência. Por fim, refiro os objectivos que presidem à sua elaboração e as respectivas questões de investigação, terminando com uma visão geral da organização dos capítulos do estudo.

1.1. Motivações do estudo

A insatisfação com os sistemas educativos é um fenómeno universal e que se manifesta desde há muito. Embora o desejo de mudança não seja, pois, uma novidade, as escolas de hoje deparam-se com vários tipos de problemas. Entre eles estão a desactualização dos *curricula* face à rapidez de mudanças científicas, económicas e sociais na sociedade em que vivemos, o progressivo desinteresse dos alunos pelas disciplinas académicas, em particular a Matemática, ao longo das últimas décadas e os problemas relacionados com a aprendizagem significativa da Matemática.

O ensino superior não é excepção e enfrenta também alguns problemas específicos, como os que se relacionam com a taxa de insucesso escolar, a massificação do ensino e o consequente aumento da diversidade dos estudantes ou a preparação para o exercício de uma profissão na sociedade do conhecimento (Berger & Pollatsek, 2002). Estes problemas, a que é necessário dar resposta e as inúmeras dificuldades vividas quer pelos alunos, quer pelos seus docentes, tornam imperioso redefinir as finalidades deste ensino em função da época em que vivemos e das mudanças que o caracterizam (Berger & Pollatsek, 2002; MAA, 2004; Small, 2008).

A este nível de ensino aponta-se hoje a tarefa de formar indivíduos competentes, criativos, flexíveis e dinâmicos, que busquem constante aprendizagem e que sejam capazes de lidar com situações novas. Bolonha traz também um reavivar da preocupação de inserir nos curricula universitários competências abrangentes, para lá das competências técnicas e científicas especificas da(s) área(s) de conhecimento de cada curso. Assim, algumas características distintivas da aprendizagem no ensino superior são a aquisição de mentalidade científica e de rigor, de capacidade de raciocínio e de análise, de imaginação criadora e o desenvolvimento da compreensão e da capacidade de aplicação de conhecimentos a situações práticas variadas (MAA, 2004).

Ao nível da Matemática universitária, os objectivos parecem não estar a ser atingidos, em grande parte devido aos métodos pedagógicos utilizados não proporcionarem aprendizagens ricas e gratificantes (Small, 2008). O método expositivo, continua a ser, em plena era da tecnologia da informação, o método mais usado pelos professores no ensino superior e para muitos, no início do século XXI, ainda é impensável leccionar no ensino superior sem recorrer à apresentação expositiva (Gonçalves & Kalish, 2008). Vejo, com frequência, que os planos de estudo são desenhados tendo em atenção os requisitos do rigor científico, mas são pensados independentemente do *background* dos alunos, das suas motivações, dos seus interesses intelectuais e científicos e dos seus objectivos profissionais. Nas aulas, orientadas para os conteúdos, os conceitos abstractos são primeiro apresentados e só mais tarde ilustrados com exemplos – e muitas vezes trata-se de exemplos ideais muito afastados da experiência pessoal dos alunos e dos seus interesses. Segundo Dorier, Robert, Robinet e Rogalski (1994), as dificuldades encontradas pelos estudantes devem-se, sobretudo, ao facto destes apenas terem acesso a uma fase final do processo de construção do conhecimento: a definição dos conceitos e o seu uso sistemático na resolução de problemas. O ensino tradicional, centrado no professor, parte da concepção que conhecer é acumular e armazenar informações e recorre a uma estratégia de comunicação fortemente orientada no sentido do docente para o estudante. Quando se preconiza para a universidade, entre outras funções, a preparação para a investigação, o desenvolvimento do sentido crítico e a abertura aos múltiplos desafios da educação permanente ao longo da vida (Delors, 1996), a aprendizagem por memorização e o ensino por transmissão devem ser substituídos por uma aprendizagem centrada no aluno.

No caso concreto do ensino e aprendizagem da Análise Numérica, disciplina que lecciono há vários anos para alunos dos cursos da Escola Naval, é possível constatar algumas destas dificuldades. A minha experiência como docente mostra que os alunos, de uma maneira geral, se movem através dos currículos da Matemática com pouca compreensão dos conceitos. Os alunos verbalizam conceitos e conseguem realizar procedimentos, mas não lhes dão significado, tendo grande dificuldade em compreender o que se pede e o modo como podem resolver as questões propostas. Esta situação traduz-se frequentemente em desempenhos escolares de médio e baixo nível e culmina numa insatisfação generalizada dos alunos e na dificuldade de relacionar ou perceber a utilidade, para a prática futura, de temas programáticos desta disciplina.

A introdução de uma mudança nas práticas pedagógicas implica uma autoformação que, quase sempre, envereda pela via da investigação. A realização deste trabalho de investigação surge, assim, motivada pelo meu interesse em criar estratégias didácticas alternativas ao tradicional método de ensino praticado na disciplina de Análise Numérica. Para Wink (1999) a reflexão sobre a prática é um bom ponto de partida para iniciar um desenvolvimento de métodos de ensino universitário que tenham em vista o próprio aluno. A necessidade que sinto de reformular aspectos particulares da minha prática, adaptando-a às novas realidades/dificuldades com que me deparo, e de reflectir sobre o impacte destas alterações no modo como decorre a aprendizagem dos alunos, está na base deste estudo. Além disso, procuro compreender o modo como a vivência das experiências previstas numa experiência de ensino, que concretizo, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e o seu envolvimento, com sucesso, na inquirição matemática e, desta forma, começarem a compreender a verdadeira natureza da Matemática e tornarem-se proficientes resolvedores de problemas e pensadores críticos.

A presente investigação surge na sequência de um projecto de investigação anterior (Henriques, 2006) sobre a aprendizagem da Análise Numérica no ambiente escolar, com uma especial atenção às actividades de investigação. Os resultados então obtidos conduzem a uma avaliação positiva do papel que estas actividades podem desempenhar na aprendizagem dos alunos e sugerem a possibilidade da sua integração na sala de aula, como metodologia alternativa à convencional. No entanto, para fundamentar a progressiva integração deste tipo de actividades nas aulas de Matemática é fundamental aprofundar o conhecimento sobre as dificuldades associadas à realização das actividades de investigação e os efeitos que este tipo de propostas têm na geração do conhecimento e da actividade matemática na sala de aula. Os resultados evidenciam, igualmente, que situações educativas envolvendo actividades de investigação apresentam características particulares e oportunidades de aprendizagem que caracterizam formas diferentes do pensar matemático. Evidenciam, também, a necessidade de investigação mais detalhada sobre diferentes aspectos do raciocínio dos alunos. Na verdade, o raciocínio matemático está fortemente relacionado com o uso de representações matemáticas e desempenha um papel fundamental não só na realização de actividades de investigação mas também na resolução de problemas. Deste modo, uma vez que as representações matemáticas dos alunos revelam, pelo menos potencialmente, os modos como pensam e os processos que utilizam na resolução de problemas e nas actividades de investigação, a sua análise permite compreender melhor os processos que usam e a evolução dos seus raciocínios. A presente investigação corresponde, assim, ao aprofundamento e alargamento do trabalho anterior.

1.2. Enquadramento e relevância do estudo

Novas práticas pedagógicas

As mudanças sociais e o rápido desenvolvimento tecnológico que se têm verificado na sociedade conduzem a uma alteração nas suas necessidades e, consequentemente, nas competências que é preciso desenvolver nos alunos em áreas fundamentais como a da Matemática. Existe actualmente a convicção de que os alunos precisarão de um conjunto muito vasto de competências matemáticas para desempenhar, com eficiência, funções na sociedade actual. De acordo com diversos documentos de referência na área da educação matemática, ao nível do ensino básico e secundário (APM, 1988, 1998; NCTM, 1991, 1994, 1999), os alunos devem ser capazes de: (i) desenvolver uma profunda compreensão dos conceitos e princípios matemáticos; (ii) raciocinar com rigor e comunicar com clareza; (iii) reconhecer as aplicações matemáticas no mundo que os rodeia e enfrentar os problemas matemáticos com confiança; (iv) aprender a investigar, por si próprios, as ideias matemáticas; e (v) usar experiências e observações para formular conjecturas.

O desenvolvimento destas competências implica um repensar da escola e dos seus objectivos, conduzindo a uma nova perspectiva de encarar o processo de ensino-aprendizagem. Neste processo de modernização, mais importante do que uma alteração ao nível dos conteúdos é uma mudança nos métodos de ensino e na natureza das actividades dos alunos (APM, 1988; NCTM, 1991, 1994). É necessário operar uma mudança de mentalidade e assumir uma prática pedagógica na Matemática que leve a um desenvolvimento das referidas competências. O foco do processo de ensino-aprendizagem já não pode ser a transmissão de um corpo de conhecimentos estabelecido, tem que se deslocar das capacidades elementares e conhecimentos de conceitos (definições e procedimentos de cálculo) para o raciocínio, a resolução de problemas e a realização de investigações, tornando os estudantes confiantes nas suas habilidades matemáticas, capazes de aplicar o que sabem em novas situações e aprender por si novos conteúdos.

Até certo ponto, estas competências são adquiridas no final do ensino secundário, mas a experiência pós-secundária deve reforçar o que é aprendido tanto em profundidade como em qualidade e ir mais longe. Esta questão do que é que os estudantes devem aprender no ensino pós-secundário é crítica e a Mathematical Association of America (MAA) desenvolve alguns documentos com recomendações curriculares, de certa forma semelhantes às *Normas* do NCTM (1999, 2000), que podem ser vistos como uma extensão aos princípios enunciados para o ensino elementar. Por exemplo, segundo MAA (2003), os estudantes devem: (i) adquirir o domínio de um conjunto rico e diverso de ideias matemáticas e experimentar a Matemática envolvendo-se em questões abertas contemporâneas; (ii) ser capazes de pensar analitica e criticamente, formular e resolver problemas e interpretar as suas soluções; (iii) compreender e apreciar o valor e a validade de um raciocínio, uma definição precisa e argumentação; (iv) experimentar a aplicação do conhecimento de uma área da Matemática noutra área e/ou noutras disciplinas; (v) ser capazes de usar uma variedade de ferramentas tecnológicas; e (vi) ser capazes de comunicar matematicamente tanto oralmente como através da escrita e ler matemática.

A transição para o ensino superior

Apesar das recomendações da comunidade de investigadores e das orientações curriculares dos documentos oficiais para o ensino da Matemática para os diferentes níveis de ensino, os alunos universitários revelam dificuldades acentuadas nas disciplinas de Matemática. Da análise que faço da minha experiência de ensino, ressaltam deficiências nos processos de interpretação dos enunciados, de justificação e argumentação de procedimentos e de reflexão a propósito da consistência dos resultados (Henriques & Ponte, 2008).

O ingresso no ensino superior é um momento que marca fortemente o percurso escolar dos alunos. A frequência do ensino superior é uma fase crucial no desenvolvimento dos jovens que se preparam para o mundo do trabalho. O leque de domínios do conhecimento que requerem uma diversidade de ferramentas matemáticas, progressivamente mais complexas, tem-se vindo a alargar consideravelmente, devido, sobretudo, aos avanços tecnológicos. É também evidente que os cursos fazem cada vez mais um apelo a aplicações da Matemática que escondem por trás temas e conteúdos matemáticos que podem ser estudados num contexto abstracto, mas para os quais os alunos não parecem estar motivados. Estes aspectos, juntamente com o grande número de estudantes que frequentam disciplinas de Matemática em níveis cada vez mais avançados, colocam problemas educacionais que constituem desafios para a investigação.

A forte disparidade entre a preparação dos alunos no ensino secundário e as premissas em que assenta o trabalho em Matemática de um ponto de vista superior, bem como a própria estrutura da Matemática, poderão ter alguma relevância na génese dos problemas referidos. A transição da Matemática elementar para a Matemática avançada é uma mudança fundamental no modo de tratar os assuntos. A Matemática universitária é, frequentemente, e em particular nos cursos de Ciências em que tenho experiência enquanto estudante e docente, apresentada de um modo formal, através de aulas expositivas que consistem em apresentação de teoremas e provas, com uma reduzida ou nenhuma interacção entre alunos e professores. Apesar do esforço dos professores em ajudar os estudantes a fazer sentido da teoria apresentada, o objectivo é colocar essa teoria numa base sistemática e axiomática, onde as definições formais dão origem a conceitos cujas propriedades são construídas através de deduções lógicas. Os resultados são comunicados usando linguagem formal e estabelecidos através de prova formal. Os alunos são, assim, introduzidos às teorias matemáticas num modo formal com poucas hipóteses de construir conceitos ou significado através de experiências.

Tal paradigma contrasta com o ensino da Matemática no ensino secundário, normalmente apresentada a um nível elementar, recorrendo ao pensamento concreto, em que os conceitos e noções nem sempre são acompanhados de raciocínios formais. A ênfase na escola está, frequentemente, nos cálculos e na manipulação de símbolos para obter respostas. A aquisição de conceitos tem uma base intuitiva baseada em experiências: dado um conceito familiar, devemos descrevê-lo, usando muitas vezes gráficos para fornecer visualização e sugerir propriedades que podem servir de suporte aos processos de verificação das diversas afirmações. Desta forma, o recurso a demonstrações de proposições e o contacto com noções matemáticas avançadas é escasso e muitas vezes reduzido a um conjunto de 'receitas'.

Assim, a experiência que os alunos têm ao longo do seu percurso escolar difere grandemente do modo de trabalhar na Matemática avançada e do que se espera deles na universidade. Os conceitos abordados no ensino superior revestem-se de grande complexidade, exigindo um bom domínio do pensamento matemático. Este pensamento matemático avançado não é algo que surge naturalmente mas é uma competência que tem que ser adquirida pelos estudantes para compreender os conceitos matemáticos abordados neste nível de ensino (ao entrar no campo da Matemática avançada). Se um aluno apresenta falhas na compreensão de resultados matemáticos elementares, o processo de aprendizagem de novos assuntos, fica, frequentemente, comprometido e esta transição torna-se um momento crítico de insucesso para muitos alunos.

Há actualmente uma grande preocupação nos responsáveis do ensino universitário pelo estado do ensino da Matemática e, sobretudo, pelas previsões do futuro do dito ensino. Esta preocupação tem-se manifestado de formas múltiplas, em particular no incremento significativo da investigação da aprendizagem no ensino superior, permitindo em algumas áreas criar um corpo de conhecimentos que pode ajudar a estruturar e melhorar o ensino e a aprendizagem, visando uma maior compreensão e um melhor desempenho por parte dos alunos. As razões que levaram a esta situação são bastante amplas e variadas, também existem noutros países e são objecto de investigação um pouco por todo o mundo.

Em Artigue (1999, 2003) e Cornu (1991) é possível encontrar referências a diversos trabalhos de investigação realizados sobre a aprendizagem da Matemática e os processos de ensino ao nível de ensino universitário. Apesar destes estudos usarem uma grande diversidade de estratégias e adoptarem enfoques distintos, é possível observar algumas tendências gerais e fazer uma síntese dos seus resultados. Assim, várias pesquisas debruçam-se sobre o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos desde o nível elementar até ao ensino superior (Dreyfus, 1991; Gray, Pinto, Pitta & Tall, 1999; Tall, 1991, 1992, 1995, 1997). Outro dos seus objectivos é entender como se constrói o conhecimento matemático. Dado que o tipo de ensino ministrado neste nível de escolaridade pressupõe que os alunos tenham a capacidade de manipular os conceitos a partir da sua definição formal, torna-se também importante saber como é que estes conceitos são construídos e compreendidos (Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994; Sierpinska, 1994; Vinner, 1991). Outros trabalhos, como os de Tall e Vinner (1981), mostram a discrepância existente entre as definições formais que os alunos são capazes de citar e os critérios que eles usam para verificar certas propriedades como a continuidade ou a diferenciabilidade. As noções de conceito definição e conceito imagem surgem como forma de analisar as concepções dos alunos face a esta discrepância. Há também vários estudos que evidenciam as dificuldades sentidas pelos alunos ao lidar com diferentes modos de representação, em particular com a representação gráfica e quando se procura fazer a ligação entre esta e a representação analítica (Dreyfus, 1991).

Apesar do desenvolvimento que se tem verificado internacionalmente, a investigação continua a ser muito parcial. Em Portugal, por exemplo, são raros os estudos que se debruçam sobre o pensamento matemático avançado e a compreensão dos conceitos matemáticos abordados neste nível de ensino (ver, contudo, Domingos, 2003). Há ainda uma necessidade bastante grande de trabalho de investigação, em diferentes áreas, que possa suportar, de forma coerente, as decisões que o ensino superior precisa de assumir como forma de ultrapassar as dificuldades com que se vem debatendo, acima indicadas.

A natureza das tarefas

As tarefas matemáticas realizadas na sala de aula são fundamentais para a aprendizagem dos alunos porque exprimem mensagens sobre o que é a Matemática e o que significa fazer Matemática (NCTM, 1991). Segundo Schoenfeld (1992, 1994), os estudantes desenvolvem o seu senso do que significa 'fazer Matemática' a partir das experiências matemáticas que lhes são proporcionadas nas actividades de sala de aula nas quais se comprometem. Deste modo, a natureza das tarefas em que os alunos se envolvem durante as aulas, pode influenciar e estruturar a forma como os estudantes pensam e a visão que constroem da Matemática.

A visão da Matemática que tem ganho crescente aceitação em anos recentes é baseada numa perspectiva dinâmica e exploratória da disciplina (Romberg, 1994). Ao se encarar o ensino da Matemática como um processo em que o aluno absorve conhecimentos que alguém já desenvolveu, e ao se considerar a aquisição de conceitos e técnicas um fim em si mesmo, perdem-se características essenciais da actividade matemática como explorar, levantar hipóteses e demonstrar, abstrair e generalizar, formular e resolver problemas e criar modelos (Burton, 1984; NCTM, 1991; Romberg, 1994; Schoenfeld, 1992, 1994). Nesta perspectiva, a Matemática não pode ser vista como um sistema estático e estruturado de factos, procedimentos e conceitos, mas é caracterizada por actividades como a procura e exploração de padrões para compreender as estruturas matemáticas e sublinhar relações entre elas, o uso de recursos disponíveis de forma eficiente e apropriada para formular e resolver problemas, dar significado às ideias matemáticas, pensar e raciocinar em modos flexíveis, justificar e comunicar as próprias ideias matemáticas e decidir quando é que os resultados são razoáveis (Schoenfeld, 1992). Esta visão mais dinâmica da actividade matemática, opõe-se a uma aprendizagem concebida como um processo de absorção reforçado por uma prática repetitiva e tem, por isso, implicações nas decisões que se tomam sobre o que é preciso aprender e o tipo de actividades nas quais alunos e professores se devem envolver durante as interacções na sala de aula.

Actualmente, é incontestável que as estratégias de ensino-aprendizagem adoptadas no âmbito da sala de aula, sob enfoques construtivos, oferecem novas propostas para a busca mais eficiente de aprendizagens significativas pelos alunos. A recomendação formulada por diversas entidades na área da educação matemática, no sentido de se privilegiar, no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, as actividades de resolução de problemas e de exploração de situações problemáticas, tem vindo a ser cada vez mais reforçada nos últimos anos (APM, 1988; MAA, 2004; NCTM, 1991; Small, 2008).

A importância da formulação e resolução de problemas no ensino da Matemática é sublinhada por Pólya (1945, 1981). Na sua perspectiva, o aluno aprende Matemática se for desafiado com um trabalho criativo, de investigação, através de problemas apropriados que este autor designa por ‘problemas de investigação’. Assim, para este autor, devem ser proporcionadas situações de aprendizagem que despertem o interesse dos alunos e em que eles sejam desafiados a descobrir resultados e a estabelecer relações. Para os alunos desenvolverem estas capacidades, as salas de aula devem tornar-se ambientes nos quais eles têm oportunidades frequentes para se comprometerem na actividade matemática dinâmica que assenta em tarefas matemáticas deste tipo (NCTM, 1991; Schoenfeld, 1994). A ênfase concedida as estas tarefas justifica-se, segundo a APM (1988), porque permitem que o aluno faça a sua própria experiência matemática e conduzem a outras igualmente importantes, como sejam, a análise de estratégias a adoptar, argumentação, tentativas de prova, crítica de resultados e construção de conceitos. Por exemplo, um problema pode desafiar a curiosidade do aluno, proporcionar a exploração informal de vários caminhos, incentivar o gosto pela descoberta. Na exploração de situações problemáticas os alunos podem realizar pequenas investigações, formular problemas, analisar caminhos e resultados, tendo assim oportunidade de 'fazer' Matemática.

Abrantes (1989, 1994) defende que os problemas com questões mais abertas, designados por 'problemas abertos', revelaram ter maior potencialidade ao nível do ensino e aprendizagem despoletando assim o interesse que actualmente se confere às actividades de investigação. Segundo o autor, tanto a resolução de problemas como as investigações apelam à imaginação e à criatividade, requerendo capacidades que se situam muito para além do cálculo e da memorização de definições e procedimentos. Estas capacidades, frequentemente designadas de 'ordem superior', surgem associadas à comunicação, ao espírito crítico, à modelação, às demonstrações e a outros processos de natureza metacognitiva. A mesma ideia é referida por Ponte e Matos (1996) quando afirmam que, à semelhança do que acontece com a resolução de problemas, as investigações matemáticas implicam processos complexos de pensamento e requerem o envolvimento e a criatividade dos alunos.

É, pois, importante que se proporcionem aos alunos actividades que possam constituir um contexto de trabalho em que os processos de raciocínio e a construção de conceitos surjam de uma forma natural. A investigação recente sugere que a análise do trabalho dos alunos pode conduzir a mudanças na prática de ensino que sejam mais efectivas em termos da sua aprendizagem matemática (Doerr, 2006). A pesquisa realizada, por exemplo em Henriques (2006), evidencia que as actividades de investigação, pela sua natureza, surgem como uma metodologia capaz de vincular os alunos a uma aprendizagem entusiástica, efectiva e eficaz, como uma forma de ultrapassar as limitações do ensino tradicional e certamente mais adequada em disciplinas em que se pretende desenvolver competências diversificadas.

Além disso, os estudos realizados em diferentes níveis de escolaridade, revelam que as actividades de cariz investigativo contribuem de forma significativa para a compreensão de novos conceitos e para desenvolver o pensamento matemático dos alunos (Henriques, 2006; Ponte, 2003, 2007). No entanto, a introdução de tarefas de investigação como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática no ensino superior tem ainda uma expressão reduzida, em grande medida devido ao facto dos dados de investigação continuarem a ser insuficientes para fundamentar a sua implementação neste nível de ensino. Por esta razão, os resultados deste estudo podem ter interesse para uma comunidade alargada de professores deste nível de ensino ao contribuir para a produção de novo conhecimento que permita ajudar a estruturar e melhorar o ensino e a aprendizagem, visando uma maior compreensão e um melhor desempenho por parte dos alunos.

1.3. Objectivos e questões do estudo

Assumindo, portanto, que as actividades de investigação constituem um cenário educativo com características particulares que tem implicações no processo de aprendizagem da Matemática em geral, e da Análise Numérica em particular, é desejável aprofundar a análise da actividade dos alunos e compreender, de forma estruturada e com mais detalhe, o papel destas actividades na aprendizagem dessa disciplina.

Neste sentido, surge como pertinente a concretização de uma experiência de ensino suportada pela realização de actividades de investigação nas aulas desta disciplina, tendo em vista a aprendizagem dos conceitos e procedimentos matemáticos avançados e o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. De forma sumária, pode dizer-se que o presente estudo pretende examinar e clarificar o processo de aprendizagem da Análise Numérica centrado em actividades de investigação.

Os objectivos do estudo são a descrição e a análise dos processos de raciocínio que os alunos do ensino superior utilizam na resolução de problemas e na realização de actividades de investigação na disciplina de Análise Numérica (AN) e de que forma isso contribui para a sua aprendizagem de conceitos e procedimentos nesta disciplina. Tendo em conta estes objectivos, formulo um conjunto de questões mais específicas que servem de referencial à configuração do trabalho de investigação. Um primeiro grupo de três questões foca-se nas características do trabalho desenvolvido pelos alunos na exploração de tarefas de investigação e na resolução de problemas. Em particular, tento perceber:

1. Que tipo de representações matemáticas os alunos constroem na resolução de problemas e na realização de actividades de investigação em Análise Numérica e que dificuldades evidenciam no seu uso?

2. Que processos matemáticos usam e que dificuldades manifestam os alunos na realização de tarefas de investigação em Análise Numérica?

3. Que estratégias de raciocínio utilizam e que dificuldades evidenciam os alunos na resolução de problemas em Análise Numérica?

Com a quarta e última questão, procuro perceber quais as potencialidades das actividades de investigação na promoção das aprendizagens dos alunos. Mais concretamente:

4. Quais as aprendizagens realizadas pelos alunos e de que modo a experiência de ensino contribui para a compreensão que os alunos evidenciam dos conceitos e procedimentos de Análise Numérica?

1.4. Organização do estudo

O presente estudo encontra-se estruturado em duas partes distintas que integram e completam os resultados encontrados. A primeira parte corresponde à fundamentação teórica dos aspectos centrais em torno dos quais se baseia o estudo. Inclui o capítulo 1, de introdução, onde procuro identificar a problemática em que o mesmo se insere e as respectivas questões de investigação, apresento as motivações e fundamento a sua pertinência. Inclui, igualmente, o capítulo 2 que constitui o quadro de referência utilizado no estudo. Este capítulo, de fundamentação teórica, está organizado em 3 eixos – pensamento matemático avançado, problemas e actividades de investigação e representações matemáticas – e integra uma revisão da literatura considerada relevante para a investigação.

A segunda parte do estudo inclui os restantes capítulos (3 a 10) e constitui a sua parte empírica. O capítulo 3 está relacionado com a metodologia utilizada na investigação, onde discuto as vantagens na utilização de uma abordagem qualitativa, integrando uma componente de experiência de ensino baseada em actividades de investigação. Faço também uma caracterização dos participantes e uma breve descrição do estudo exploratório que contribui para a formulação das principais características do estudo principal. Ainda neste capítulo, descrevo e justifico os procedimentos e as técnicas seguidas relativamente à recolha e análise de dados. No capítulo 4, apresento a experiência de ensino que serve de base a esta investigação. Descrevo os seus princípios gerais, a sua planificação e justifico as opções tomadas, com destaque para as tarefas de natureza investigativa que nela constam.

Nos capítulos 5, 6, 7 e 8 descrevo os principais resultados da experiência de ensino relativos à turma e aos três alunos estudados individualmente. No primeiro capítulo desta sequência refiro o trabalho desenvolvido com as turmas ao longo da experiência de ensino e, nos três capítulos seguintes, apresento a análise dos dados relativos aos três alunos objecto de estudos de caso. Depois, no capítulo 9, discuto os principais resultados do estudo, articulando-os com a literatura.

Finalmente, no capítulo 10, faço uma síntese do estudo, apresento as suas principais conclusões em função das questões enunciadas e termino com uma breve reflexão pessoal sobre todo o percurso realizado e com possíveis propostas para futuros desenvolvimentos da investigação neste domínio.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo apresento a fundamentação teórica, definida a partir do processo de revisão bibliográfica desenvolvido desde o início da pesquisa e que acompanha todo o processo de investigação. Pretendo que o quadro teórico tenha uma dupla função de estruturação e de integração do problema em estudo. Os tópicos a desenvolver incluem o pensamento matemático avançado, a resolução de problemas e actividades de investigação e as representações matemáticas.

2.1. Pensamento matemático avançado

A noção de pensamento matemático avançado

A investigação em Educação tem-se debruçado sobre o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos desde o nível elementar até ao ensino superior. No entanto, as várias pesquisas realizadas no sentido de se definir o que é o pensamento matemático avançado (PMA) e quais as características únicas que são específicas da aprendizagem da Matemática avançada, não têm sido conclusivas. Assim, procuraro apenas apresentar a visão de alguns autores sobre o termo PMA, as suas características essenciais que o tornam diferente do pensamento matemático elementar (PME), bem como os processos mentais considerados subtis e complexos envolvidos neste tipo de pensamento. São ainda abordadas algumas teorias que emergem relacionadas com a construção, pelos alunos, dos conceitos matemáticos que estão subjacentes ao PMA e que têm sido largamente usadas na investigação em educação matemática.

O termo "pensamento matemático avançado" é proposto por um grupo de trabalho do *International Group for the PME* (*Psychology of Mathematics Education*) que se reune pela primeira vez no encontro de 1987 e inclui "todo o pensamento matemático desde os últimos anos da escola secundária, até à Matemática axiomática formal baseada na definição e prova" (Harel, Selden & Selden, 2006, p. 147).

Dreyfus (1991) e Tall (1991) consideram o PMA como sendo um tipo de pensamento que pode ser encontrado na aprendizagem de vários conceitos matemáticos complexos que podem aparecer em diversos níveis de escolaridade, manifestando-se com mais incidência nos anos terminais do ensino secundário e ao longo do ensino superior. Dreyfus (1991) faz uma distinção muito ténue entre PME e PMA considerando: "É possível pensar em tópicos matemáticos avançados numa forma elementar e pode ter-se pensamento avançado sobre tópicos elementares" (p. 26). Para o autor, não existe distinção na forma entre muitos dos processos do pensamento matemático elementar e de pensamento matemático avançado, mesmo pensando que a Matemática avançada é mais focalizada na abstracção da definição e dedução. Embora os processos de representação e abstracção (entre outros) estejam presentes nos dois tipos de pensamento, a diferença é marcada pela complexidade que é exigida a cada um deles e pela forma como essa complexidade é gerida. Uma visão semelhante é defendida por Tall (1991) que postula que muitas das actividades que ocorrem no ciclo completo de actividade em PMA também ocorre na resolução de problemas da Matemática elementar, mas a possibilidade de definição formal e dedução é o factor que distingue o PMA.

Para Gray et al. (1999), o termo PMA tem sido usado mais no sentido do pensamento de matemáticos profissionais criativos quando imaginam, conjecturam e provam teoremas. Acrescentam ainda que esse termo também se aplica ao pensar dos estudantes a quem lhes é apresentado definições e teoremas criados por outros e se lhes pede a construção de um conceito.

A visão dos vários autores parece então ser que muitas das características apresentadas pela Matemática avançada apresentam uma forte continuidade da Matemática em idades mais jovens. É a complexidade dos processos usados no pensamento matemático e as mudanças cognitivas que se verificam no indivíduo que determinam o tipo de pensamento envolvido na aprendizagem de um dado conceito e que caracterizam a transição do PME para o PMA.

Tall (1991) distingue dois níveis de Matemática: o nível elementar e o nível avançado. A mudança para um pensamento matemático mais avançado envolve uma transição difícil, de uma posição onde os conceitos têm uma base intuitiva fundamentados na experiência, para outra posição onde eles são especificados por definições formais e as suas propriedades reconstruídas através de deduções lógicas. Segundo o autor, "a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: do descrever para o definir, do convencer para o provar numa maneira lógica baseada nessas definições" (p. 20). Na sua perspectiva, esta transição da coerência da Matemática elementar para a consequência da Matemática avançada, baseada em entidades abstractas que o indivíduo deve construir através de deduções a partir das definições formais, requer uma reconstrução cognitiva que é vista como uma luta dos estudantes universitários com as abstracções formais como se elas dominassem a aprendizagem nesta fase inicial. O mesmo autor considera, ainda, que há dois tipos diferentes de desenvolvimento cognitivo nos indivíduos quando trabalham em Matemática elementar. Tall (1995) coloca como hipótese que, no indivíduo, o crescimento cognitivo do pensamento matemático elementar para o avançado se faz partindo da 'percepção de' objectos do mundo exterior e da 'acção sobre' esses mesmos objectos e construindo estruturas de conhecimento segundo dois desenvolvimentos completamente distintos mas que ocorrem ao mesmo tempo. Um é o desenvolvimento de Van Hiele, que dá origem à Geometria, onde os objectos são vistos como estruturas visuais-espaciais. À medida que as propriedades dos objectos são testadas, estes são descritos verbalmente conduzindo ao desenvolvimento de uma demonstração também verbal. Para a outra linha de desenvolvimento do pensamento matemático, o autor sugere que este é principalmente construído por encapsulações sucessivas de processo para conceito, acompanhadas do uso de símbolos manipuláveis. Na sua perspectiva, estes dois desenvolvimentos podem ocorrer de forma independente. Contudo, muitas ligações úteis têm sido feitas entre métodos visuais e simbólico-manipulativos e é claramente oportuno tirar vantagem delas para desenvolver uma abordagem versátil que aproveita o melhor de cada uma.

A crescente complexidade que este tipo de desenvolvimento apresenta, conduz a uma mudança no estádio cognitivo, desde o equilíbrio de convicção visual e manipulação proceptual para objectos definidos e dedução formal. Assim, pode considerar-se que no centro da transição da Matemática elementar para a avançada está a ideia de construir conceitos a partir da definição em vez de encontrar propriedades a partir de conceitos já existentes, usando-as como axiomas para construir teorias matemáticas sistemáticas e entretanto modificando a noção de prova. Em ambos os casos a linguagem é usada para formular as propriedades dos objectos mas na Matemática elementar a descrição é construída a partir de experiências sobre o objecto, enquanto na Matemática avançada as propriedades dos objectos são construídas a partir da definição.

Tall (1995) acrescenta ainda que a linha separadora entre o PMA e o PME é aquela que localiza a mudança cognitiva ocorrida com a introdução do método axiomático, onde os objectos têm um estado cognitivo novo como conceitos definidos construídos a partir de definições verbais.

A figura seguinte representa a sistematização da evolução do pensamento matemático elementar até ao pensamento matemático avançado, na perspectiva cognitiva desenvolvida por Tall.

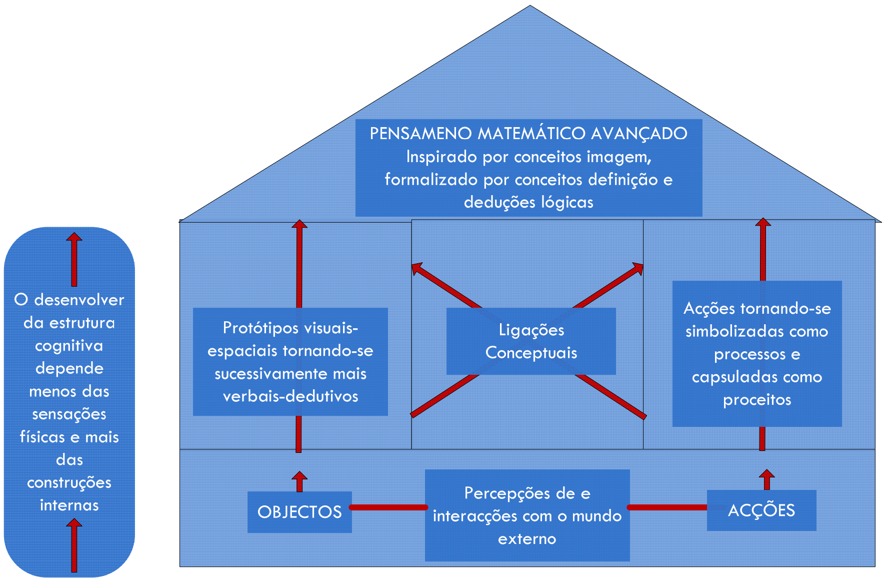


Figura 2.1 – Esboço do desenvolvimento cognitivo desde a criança ao matemático investigador (adaptado de Tall, 1995, p. 64)

Também nas palavras de Gray et al. (1999), a transição para o PMA, requer uma mudança da construção objecto → definição para a construção definição → objecto. Ou seja, na Matemática avançada, as definições dos conceitos são formuladas e a natureza do próprio conceito é construída estabelecendo as propriedades por dedução lógica. Esta construção envolve a selecção e o uso de critérios para a definição de objectos e isto além de poder inverter as experiências anteriores de relações, envolve uma transposição da estrutura do conhecimento.

Outros autores que referenciam a mudança da Matemática elementar para a avançada são Robert e Schwarzenberger (1991). Na visão defendida, a transição para o PMA faz uma mudança completa no foco a partir da existência de objectos percebidos e símbolos representando acções sobre objectos para novas teorias baseadas em propriedades específicas de estruturas matemáticas formalmente definidas. No entanto, a qualidade essencial que torna o PMA diferente da Matemática elementar é a introdução de definições e demonstrações (provas) formais.

Características do PMA

Processos mentais associados ao PMA

A natureza do pensamento matemático está necessariamente interligada aos processos cognitivos que dão origem ao conhecimento matemático. A compreensão, tal como acontece, é um processo ocorrendo na mente do indivíduo. Pode ser rápida, um *click* na mente, mas é, frequentemente, baseada numa longa sequência de actividades de aprendizagem durante as quais uma grande variedade de processos mentais ocorrem e interagem. Os investigadores em educação matemática têm, por isso, tomado consciência da importância dos processos mentais e as suas interacções na compreensão da Matemática avançada.

Dreyfus (1991) discute os processos envolvidos no PMA, reconhecendo que muitos deles podem também ser encontrados na Matemática elementar. Ele admite que não há uma distinção profunda entre muitos dos processos que são usados no PME e no PMA, no entanto, a maior parte das vezes, a complexidade da Matemática avançada requer que vários desses processos surjam ao mesmo tempo. Os processos que o autor considera estarem presentes nos dois tipos de pensamento são os processos envolvidos na representação de conceitos e de propriedades, os processos envolvidos na abstracção, os processos que estabelecem relações entre o representar e o abstrair, e ainda processos que podem incluir entre outros a descoberta, a intuição, a verificação, a prova e a definição. Dreyfus expressa ainda, que em muitos processos relevantes para a compreensão da aprendizagem e do pensamento em Matemática os seus aspectos matemáticos e psicológicos raramente podem ser separados. As imagens mentais e as imagens matemáticas estão intimamente ligadas e é precisamente esta ligação entre a Matemática e a Psicologia que tornam os processos interessantes e relevantes para a compreensão da Matemática avançada.

Dentro dos processos presentes no PMA, a representação e a abstracção são, segundo Dreyfus (1991), os mais poderosos processos para passar de um nível de detalhe para outro e desta forma gerir a complexidade crescente que se verifica na passagem do PME para o PMA.

Processos envolvidos na Representação

Os processos envolvidos na representação, de acordo com Dreyfus (1991) são os processos de: (i) representação; (ii) mudança de representações e a tradução entre elas; e (iii) a modelação. O autor considera ainda que o processo de representação envolve as representações simbólicas, as representações mentais e a visualização.

Os símbolos são indispensáveis na Matemática avançada pois envolvem relações entre signos e significado. Eles servem para construir o conhecimento individual implícito – o significado – que é explicitado em termos de símbolos. No entanto, deve haver algum significado associado com determinada noção antes que o símbolo para essa noção possa ter algum uso.

Outra componente do processo de representação é ainda mais central na aprendizagem e no pensamento matemático – a representação mental. Quando nos referimos a um objecto ou processo matemático, cada indivíduo relaciona-o com a sua representação mental. Representar um conceito significa gerar um caso, um exemplo ou uma imagem dele. Mas esta descrição não especifica se o caso gerado é simbólico ou mental, nem indica o que 'gerar' significa em termos de processos pelos quais as representações mentais surgem e como são desenvolvidas. Desta forma, enquanto uma representação simbólica é externamente escrita ou verbalizada, usualmente com o objectivo de tornar a comunicação sobre o conceito mais fácil, a representação mental refere-se ao esquema interno ou imagens de referência que o indivíduo usa para interagir com o mundo exterior. A representação mental torna-se assim fundamental para permitir ao indivíduo comunicar o seu pensamento sobre um objecto ou processo.

A visualização é outra componente do processo de representação e tem um importante papel na criação das representações mentais. A visualização oferece intuição e compreensão e surge como um processo de formação de imagens que poderão ser utilizadas eficazmente na descoberta e compreensão dos conceitos matemáticos (Domingos, 1994).

Kaput (1987) fez uma descrição mais geral sobre como é que as representações mentais dos conceitos matemáticos podem ser geradas. De acordo com a sua teoria, as representações mentais são criadas com base em sistemas de representação concretos, que podem ser percebidos materialmente. Um indivíduo pode então criar uma representação mental simples ou várias para o mesmo conceito matemático. Para ter sucesso em Matemática, é desejável, segundo Dreyfus (1991), ter representações mentais ricas dos conceitos, isto é, que contenham muitos aspectos do conceito ligados. Na mente de um indivíduo, podem existir várias representações mentais concorrentes, com a vantagem de poderem ser chamadas em diferentes situações. Em casos mais favoráveis, essas representações mentais podem mesmo ser complementares e integradas numa representação única do conceito. Como resultado deste processo, o indivíduo tem ao seu dispor, aquilo que o autor designa por representações com ligações múltiplas e que permite o uso simultâneo de várias representações e a troca eficiente entre elas em momentos apropriados de acordo com a situação em causa. A mudança deve ser, na maioria das vezes, efectuada entre representações actuais. Este processo de mudança de representações está assim intimamente associado ao da representação.

Associado à mudança de representações está ainda um outro processo, a que Dreyfus chama tradução. No caso do PMA, a tradução entre representações mentais pode ser entendida como a passagem de uma formulação de uma propriedade matemática ou problema para outro.

Usualmente, o termo modelação refere-se à procura de uma representação matemática para um objecto ou processo não matemático. Neste caso, significa a construção de uma estrutura ou uma teoria matemática que incorpore as características essenciais do objecto, sistema ou processo a ser descrito. O modelo matemático ganha então o estatuto de uma representação da situação, embora esta, por si só, não seja suficiente para o indivíduo. Este necessita de formar também uma representação mental associada ao processo da modelação. Desta forma, o processo de representação pode considerar-se, de alguma forma, análogo ao de modelação, mas num outro nível:

> Na modelação, a situação ou sistema é físico e o modelo é matemático; na representação o objecto a ser representado é a estrutura matemática e o modelo é a estrutura mental. Assim a representação mental está relacionada com o modelo matemático, assim como o modelo matemático está relacionado com o sistema físico. (Dreyfus, 1991, p. 34)

Processos envolvidos na abstracção

Muitos dos processos mencionados ocorrem em qualquer nível do pensamento matemático. Outros processos, contudo, tem uma importância acrescida à medida que a experiência e a habilidade dos estudantes se desenvolvem e que os conteúdos matemáticos com que lidam se tornam mais avançados. O mais importante destes processos é a abstracção. Se um indivíduo desenvolve a capacidade de, conscientemente, fazer abstracções de situações matemáticas, ele atinge um nível avançado do pensamento matemático. Dois processos, além da representação, formam um pré-requisito para a abstracção: a generalização e a síntese (Dreyfus, 1991).

Generalizar é induzir, partindo do particular, para identificar semelhanças e expandir domínios de validade. Sintetizar significa combinar ou compor partes para que formem um todo, enquanto entidade. O processo de abstracção está assim, para Dreyfus (1991), intimamente ligado à generalização e síntese. No entanto, ele considera que nem um nem o outro fazem exigências cognitivas tão fortes como a abstracção. Esta destaca-se precisamente por conseguir reunir o potencial da generalização e da síntese. A natureza dos seus processos mentais é que é diferente da dos processos de generalização e de síntese. A generalização usualmente envolve uma expansão da estrutura de conhecimento individual enquanto a abstracção é mais provável envolver uma reconstrução mental. A abstracção é sobretudo um processo construtivo – a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, isto é, a partir de propriedades e de relações entre objectos matemáticos. Este processo está dependente do isolamento que o indivíduo consegue fazer das propriedades e relações apropriadas e requer a capacidade de deslocar a atenção dos próprios objectos para a estrutura das suas propriedades e relações.

Tall (1991) refere-se à distinção cognitiva que deve ser feita entre diferentes tipos de generalização tendo em consideração as actividades cognitivas que estão envolvidas. Ele refere-se assim às "generalizações expansivas" como sendo aquelas em que se estende a estrutura cognitiva existente sem requerer mudanças nas ideias correntes. Quando tais mudanças são requeridas o processo é chamado "generalização reconstrutiva" e pode ser identificado com a abstracção. Outro tipo de generalização é a "generalização disjuntiva" e diz respeito a peças de nova informação desligadas que são adicionadas às estruturas do conhecimento já existentes, sem que haja qualquer integração com estas. Trata-se de uma generalização no sentido em que o aluno pode ser capaz de operar com um maior número de exemplos embora não seja capaz de compreender a extensão das implicações abstractas que lhe estão associadas, por se tratar de um conjunto de peças de informação que não estão ligadas entre si.

Segundo outros autores, para além de representar e abstrair outros processos intervêm no pensamento sobre Matemática avançada. Ervynck (1991) descreve aqueles que estão relacionados com a criatividade e que, segundo ele, envolvem quer a visão de construir partes de uma estrutura por conjectura e argumentação quer a capacidade de, por vezes, refinar a estrutura com base numa abordagem matemática dedutiva. Ervynck sugere que um acto de criatividade pode requerer compreensões tais como criar um conceito útil, descobrir uma relação não notada e construir uma ordenação útil. Embora a expectativa tradicional seja a de um resultado rigoroso e preciso, o processo em si próprio pode ser circular e errático. O poder da motivação para a criatividade matemática deve resultar de uma interacção de elementos tais como compreensão, intuição, reorientação em direcção ao que é importante, generalização e capacidade de se focar nos traços principais.

Desenvolvimentos em PMA relacionados com a prova

A história da Matemática tem sido marcada por mudanças no significado atribuído à prova. Tall (1989) discute a natureza da prova matemática e observa que a noção de prova tem, em diferentes contextos, significados distintos:

> Para um juiz ou um júri, significa alguma coisa estabelecida pela evidência 'além de dúvida razoável'. Para um estatístico significa alguma coisa ocorrendo com certa probabilidade (...). Para um cientista significa alguma coisa que pode ser testada. Um matemático quer mais (...). (p.28)

Embora os matemáticos reclamem partilhar de uma noção coerente de prova, existem algumas diferenças subtis na aceitação de uma prova dentro da comunidade matemática. A forma de prova geralmente aceite pelos matemáticos é a prova lógica, baseada em definições de conceitos e deduções formais. No entanto, Tall (1999) sugere que diferentes formas de prova são apropriadas em diferentes contextos históricos e culturais, dependendo da estrutura cognitiva e de formas particulares de representação disponíveis ao indivíduo. Estas formas tornam-se disponíveis em diferentes estádios de desenvolvimento cognitivo. Para uma criança, a prova pode ser realizada através de uma demonstração física, antes que o sofisticado uso de provas verbais da Geometria Euclidiana possa ser introduzida com sucesso. À medida que a criança se desenvolve, diferentes contextos são percebidos de diferentes modos, cada um tendo a sua própria forma de justificação.

O desenvolvimento cognitivo da criança é caracterizado pela construção de conceitos mentais cada vez mais sofisticados. Bruner (1966) formulou o desenvolvimento das representações do conhecimento em três modos: inactivo, icónico e simbólico. A forma mais básica de comunicação é inactiva, usando acções físicas para exprimir ideias. O seguinte é icónico, usando imagens ou diagramas como representações físicas. O último é simbólico no qual Bruner inclui não apenas 'linguagem na sua forma natural' mas também as 'linguagens artificiais de números e lógica'.

Tall (1995) explora estes modos de representação de conhecimento de Bruner e explica como é que as representações inactivas, baseadas em interacções com o ambiente e comunicação através de acções e gestos, proporcionam fundações para o crescimento matemático e como é que as representações visuais e simbólicas revelam diferentes tipos de desenvolvimento os quais interagem, num nível avançado, originando a necessidade de definição e prova formal. Para o autor, existem dois desenvolvimentos paralelos distintos, de visualização e simbolização, com diferentes formas de prova.

No nível mais primitivo está a interacção inactiva com o meio ambiente. As representações visuais inicialmente representam objectos físicos mas através do desenvolvimento cognitivo tornam-se objectos mentais platónicos, o abstracto 'perfeito' contrapõe-se à experiência física. Por outro lado, na aritmética e na álgebra os símbolos são designados para cálculo e manipulação e obtêm o seu poder do facto de poderem evocar tanto os processos como os conceitos, sendo considerados proceitos (Gray & Tall, 1994). O diagrama da figura seguinte mostra a crescente sofisticação a partir dos proceitos numéricos (na Aritmética) até aos proceitos simbólicos (da Álgebra). No meio, entre o visual/platónico e o numérico/simbólico estão as representações gráficas usadas no sentido de ligar a visualização e a simbolização através de, por exemplo, representações visuais de relações numéricas ou para visualizar relações simbólicas. Separadas destas representações estão as representações formais da Matemática, através de definições e deduções usando a prova formal.

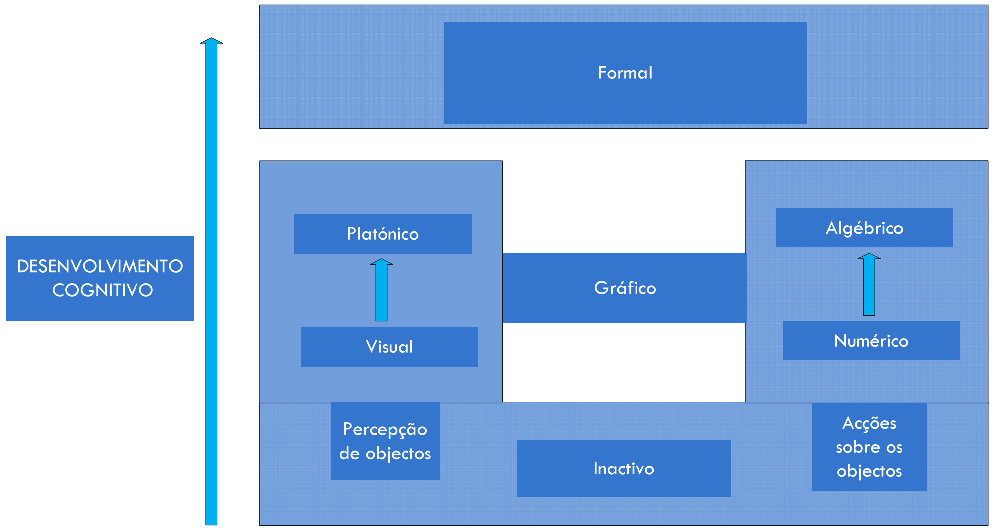


Figura 2.2 – Desenvolvimento cognitivo das representações (adaptado de Tall, 1999, p. 120)

Esta mudança das representações visuais e simbólicas para as representações formais requer uma reconstrução cognitiva enorme. Na Matemática elementar os indivíduos estão inseridos num contexto onde os conceitos são desenvolvidos através da experiência prática e depois descritos verbalmente e representados visualmente. O conceito precede a descrição. Na formalização da Matemática avançada, é a definição que surge como tendo a primazia. O conceito formal é construído a partir da definição formal, e as propriedades dos objectos são apenas reconstruções significativas requeridas para estabelecer a definição. Na Matemática formal, a definição determina o conceito e as suas propriedades são agora construídas através de deduções lógicas. Para os mais experientes, a prova formal é significativa e essencial, mas isto depende do crescimento cognitivo desses indivíduos. Pode não ser compreendida por aqueles que não têm a necessária sofisticação. A prova é assim dependente do contexto e o seu desenvolvimento cognitivo deve ter em conta a estrutura cognitiva e as representações disponíveis ao crescimento individual.

As diferentes representações disponibilizam assim diferentes tipos de prova, que podem ou não ter um estatuto aprovado dentro do mundo da Matemática e que Tall (1999) relata, incluindo a prova física inactiva através da aritmética e da manipulação algébrica até à prova formal na Matemática universitária. No nível mais primitivo, a prova inactiva envolve realizar uma acção física para demonstrar a verdade de alguma coisa. Isto invariavelmente envolve um suporte verbal e visual, apesar do factor essencial ser a necessidade de movimento físico para mostrar as relações requeridas. A prova visual envolve elementos inactivos e tem, usualmente, um suporte verbal. Isto dá origem a um tipo de prova frequentemente designada por "genérica" e que envolve "ver o geral no específico" (Tall, 1995). Esta prova genérica é assim possível, quando uma afirmação específica é vista como sendo típica de uma classe de afirmações. Por vezes, a explicação do conceito geral, a partir de um exemplo típico, é mais fácil de compreender que o processo de reconstrução baseado no formalismo. Investigando os estudantes no seu primeiro contacto com a prova na universidade, Tall (1979) relata que um número significativo de estudantes mostra preferência por uma prova genérica (um exemplo generalizável) da irracionalidade de 2, em contraste com a prova clássica da contradição. Os estudantes preferem a prova genérica porque explica porque é que o resultado é verdadeiro.

A prova euclidiana é muitas vezes vista como sendo um bom ponto de partida para desenvolver o rigor da prova lógica. No entanto, as provas individuais são quase sempre translações verbais do que é visto numa figura envolvendo uma configuração geométrica. Desta forma, prova euclidiana é prova genérica verbal aplicada a toda uma classe de figuras geométricas com determinadas propriedades (Tall, 1999). No séc. XIX, a linguagem verbal da Geometria Euclidiana contém crenças implícitas que não fazem parte de definições formais e as ideias visuais tornam-se então suspeitas e não credíveis, apesar de frequentemente parecerem tão convincentes. Esta descrença é baseada nas queixas de que a Geometria depende de intuições subtis sobre o espaço onde uma prova deve ser universal e independente da representação. De facto, o que parece originar a necessidade de prova é o receio de que alguma coisa possa iludir a intuição. A intuição seguramente não consegue abranger todos os conceitos imagem e pode ser enganosa quando a prova é baseada na convicção (Tall, 1999).

Fischbein (1982) explora o papel complementar da intuição no pensamento produtivo e sugere que "a função essencial da intuição é ser homóloga da percepção no nível simbólico, tendo a mesma tarefa da percepção: preparar e guiar a acção (mental ou externa)" (p. 11). O autor também vê intuição como complementar ao rigor: ao condensar uma solução analítica numa forma compacta, está a ser criada uma forma de convicção que é adicionada à que está a surgir da aceitação da correcção formal ou lógica.

À medida que os conceitos mudam em significado – desde inactivo, através do visual ou simbólico até ao formal – diferentes tipos de prova podem convencer um indivíduo. Mas o que não é satisfatório para um indivíduo num determinado estádio de desenvolvimento pode provar (e muitas vezes prova) ser insatisfatório mais tarde. Torna-se assim claro (para um experiente) que algo mais é necessário para uma prova formal, nomeadamente, uma sequência lógica de deduções descrita verbalmente a partir das definições verbais. A noção de prova formal advém do novo estatuto dos objectos num nível formal, os quais são dados pelas definições usadas como critério para construir os conceitos. Para Tall (1991) um passo essencial na Matemática avançada é ter em conta a transição da explicação genérica para a demonstração formal. Esta inversão da experiência para o definir um objecto tem sido considerada como uma componente essencial na transição do PME para o PMA.

A transição dos hábitos experimentais e intuitivos do raciocínio matemático da escola para as exigências formais do PMA é abrupta. As características dominantes do PMA que causam as maiores dificuldades dos alunos com o raciocínio matemático avançado são, sobretudo, a mudança do modo de pensamento concreto para o abstracto e as noções de prova matemática (dedutiva e indutiva). Segundo Bell (1976, 1979), os alunos não estão preparados para atravessar a barreira entre o conhecimento empírico de uma generalização e um conhecimento dedutivo. Como Robert e Schwarzenberger (1991) notam, o aumento na quantidade de material ensinado nos cursos avançados bem como a inversão no caminho de apresentação deste material (do experimental para o axiomático-dedutivo) são as diferenças básicas entre Matemática elementar e avançada enquanto conhecimento processado didacticamente. Os autores também reclamam que a capacidade para distinguir entre Matemática e reflexão meta-matemática bem como a capacidade para a última são características inerentes do PMA.

Outro modelo de desenvolvimento de prova é o de Van Dormolen (1977). O autor distingue entre provas específicas, de propriedades comuns e de razão sobre raciocínio. Bell (1979), seguindo a sua tríade de funções para uma prova (verificação, iluminação, sistematização) também reconhece que as práticas de prova dos estudantes parecem desenvolver-se da regularidade e racionalidade para a qualidade explicativa e sofisticação lógica.

As investigações realizadas sobre a prova têm considerado vários aspectos, quer os que estão relacionados com tipos de prova originadas pelas mudanças de visão dos estudantes, quer sobre as competências associadas à capacidade de estruturar provas e explicações em Matemática. Existe uma substancial evidência nos resultados das investigações, de acordo com as quais os estudantes acham a prova difícil, desnecessária e sem sentido. Além disso, os estudantes, de forma geral, usam a evidência empírica como prova e preferem argumentos empíricos sobre argumentos dedutivos.

Martin e Harel (1989), Porteous (1990) e Coe e Ruthven (1994) identificaram que os estudantes não limitam o seu entendimento de prova matemática a argumentos dedutivos, mas também aceitam argumentos empíricos e evidência indutiva como prova suficiente. De facto, Vinner (1983) já tinha observado que os estudantes vêm uma prova geral como um método de verificar um caso particular. Chazan (1988, 1993) sugere duas categorias de crenças dos indivíduos sobre provas associadas com argumentação em Matemática para explicar a questão dos estudantes. Provar estratégias aparece como puro empirismo: os estudantes vêm evidência como prova e prova dedutiva como simples evidência, sendo válida e referida a um caso único. Chazan (1993) relata que os estudantes muitas vezes preferem modificar as suas estratégias empíricas para assistir a alguma limitação que possa eventualmente ocorrer, em vez de se tornarem cépticos sobre um argumento empírico. Por outro lado, os contra-exemplos não parecem perturbar a sua noção de verdade matemática, uma vez que a sua noção não é caracterizada pela universalidade.

Coe e Ruthven (1994) também demonstraram que as estratégias de prova que os estudantes utilizam são predominantemente empíricas, com uma incidência muito baixa de estratégias que podem ser descritas como dedutivas. A preocupação dos estudantes é, sobretudo, validar regras e padrões conjecturados testando-os com alguns exemplos.

Simpson (1994) sugere prova através de raciocínio e prova através de lógica como dois caminhos distintos de desenvolvimento para um entendimento de prova. O autor analisa a tensão entre as atitudes dos estudantes para provar e a noção de prova que eles apresentam na universidade, emergindo do facto que o ensino na escola tem sido mais concentrado no caminho do raciocínio, o qual é quebrado na universidade com trabalho dentro de um caminho de lógica.

Como Fischbein (1982) nota, os estudantes possivelmente não estão cientes da distinção entre argumentos empíricos e dedutivos. Mesmo quando estão, diz Schoenfeld (1987) que chama empiristas puros aos estudantes deste nível, declinam o uso da dedução como uma ferramenta construtiva na resolução de problemas.

Balacheff (1987) distingue entre provas pragmáticas e conceptuais: as primeiras recorrem a uma acção ou exemplos e as últimas não envolvem acção e baseiam-se em formulações de propriedades em questão e relações entre elas. Os resultados apontam para que a visão dos estudantes seja a de que argumentos empíricos são prova suficiente. Mesmo quando introduzidos à prova dedutiva, os estudantes não parecem apreciar o seu aspecto genérico, nomeadamente, de acordo com Balacheff (1990), aquela que é baseada num objecto que não o é por direito próprio mas sim uma característica representativa da sua classe.

Para Nardi (1996), o estudo das tensões dos matemáticos noviços revelam o contraste entre o verbal/explanatório e que a expressão matemática formal é um obstáculo para ser ultrapassado pelos estudantes. Sendo essa tensão relacionada com nova forma de comunicação, a autora sugere que o primeiro encontro dos estudantes com a Matemática formal tem as características de um processo de enculturação.

A investigação de Pinto (1998) revela como é que os indivíduos desenvolvem a noção de prova formal de formas diferentes. Estudantes naturais desenvolvem o seu conceito imagem para abarcar e iluminar o conceito definição dado. Isto permite-lhes imaginar experiências pensadas baseadas em imagens que sugerem teoremas possíveis. Os estudantes formais usam o conceito definição para construir a Matemática directamente através da dedução formal. A distinção entre experiências pensadas e prova formal (envolvendo dedução formal) leva a mais desenvolvimentos teóricos.

O processo de prova matemática tem, segundo Tall (1989) dois propósitos: (i) mostrar que uma preposição leva a uma condição final numa sequência de passos lógicos e (ii) dar uma significativa compreensão de como e porquê a conclusão é obtida a partir da hipótese. Note-se que estas duas podem ser independentes, isto é, uma prova lógica não precisa ser significativa e uma prova significativa não precisa ser lógica. A última, dando compreensão que convence, é a forma de prova que pode ajudar os estudantes a fazer conexões para suportar o seu pensamento. A prova tem também outro propósito no qual os resultados dos teoremas provados são usados para construir uma teoria sistemática. Assim, prova tem duas características contrastantes: local e global. A primeira pode ser: (i) lógica, baseada em pressupostos explícitos, a prova é usada para deduzir, passo a passo, que certas consequências surgem e (ii) significativa, produzindo conhecimento de como e porquê essas consequências surgem dos pressupostos dados. Na prova global tais consequências podem então ser usadas como blocos construtores para construir uma teoria matemática sistemática.

Há uma diferença importante e distinta entre o tipo de provas produzidas pelos matemáticos ao investigar sobre novas áreas com o objectivo de convencer os outros sobre a validade dos seus resultados e as demonstrações destes resultados que serão mais tarde usadas para os transmitir aos alunos. As últimas demonstrações precisam de incluir algum material extra que dê uma visão global da demonstração e da sua estrutura, se ela é significativa para a média dos alunos e não apenas uma sequência linear de raciocínio simbólico com controlo da validade passo a passo. Os graus de persuasão variam uma vez que, dependendo de onde a prova surge e como é apresentada, os estudantes podem sentir-se obrigados a aceitar uma prova em que eles não acreditam necessariamente. Os contextos em que os alunos encontram as demonstrações podem influenciar grandemente a sua percepção sobre o valor da mesma. Isto reflecte a realidade na comunidade matemática onde a aceitação de uma prova é muitas vezes resultado de uma variedade de factores socio-culturais em vez da sua simples formalidade. Hanna (1991) enumera uma variedade de elementos que surgem nas relações entre prova, filosofia da Matemática e o ensino desta. A autora discute a prova como um processo social baseada nos trabalhos de Lakatos (1976) e Kitcher (1984). Em particular examina os factores que concorrem para a aceitação de uma prova e o importante papel da comunidade, deixando algumas observações sobre o ensino da Matemática e o desenvolvimento do poder de raciocínio dos alunos.

Teorias Cognitivas

Têm sido desenvolvidas diversas investigações relacionadas com as construções mentais dos indivíduos. Expandindo as ideias de Piaget, a noção de processos mentais (acções sobre) concebidos como conceitos cognitivos ou objectos mentais, torna-se a base de várias teorias de aprendizagem relacionadas com o PMA. Por exemplo, Dubinsky (1991) fala de encapsulação de um processo como objecto e Sfard (1991) de reificação de processos em objectos. Gray e Tall (1994) vêm os símbolos matemáticos como *pivôs* entre processos e conceitos, definindo a noção de proceito.

Teoria APOS

Baseando-se no trabalho de Piaget, Dubinsky (1991) formula uma teoria geral para o conhecimento matemático e a sua aquisição. Segundo o autor, as acções são transformações físicas ou mentais sobre objectos que, quando se tornam intencionais, são caracterizadas como processos e depois capsuladas para formar um novo objecto. Uma colecção coerente destas acções, processos e objectos é identificado como um esquema.

Assim, o ponto de início desta teoria desenvolvida por Dubinsky é a noção de abstracção reflexiva de Piaget que usa para descrever a construção de estruturas lógico-matemáticas por um indivíduo, durante o seu desenvolvimento cognitivo. Piaget (1977) distingue três tipos de abstracção: a "abstracção empírica" e a "abstracção pseudo-empírica", através das quais os indivíduos obtêm conhecimento (abstraem propriedades comuns) dos objectos pela realização de acções (mentais ou físicas) sobre eles e a "abstracção reflexiva", complexo processo através do qual o indivíduo interioriza e coordena as acções para formar novas acções e por fim novos objectos. Estes diferentes tipos de abstracção não são independentes. Por um lado, as acções que levam à abstracção pseudo-empírica e reflexiva são realizadas em objectos cujas propriedades o sujeito só vem a conhecer através da abstracção empírica. Por outro lado, a abstracção empírica só é possível através da assimilação de esquemas que foram construídos pela abstracção reflexiva. É esta última abstracção que Piaget considera ser o método de onde derivam todas as estruturas cognitivas. Segundo este autor, a abstracção reflexiva não tem um início exacto mas está presente em idades muito jovens na coordenação de estruturas sensoriais e motoras.

Dubinsky (1991), reflectindo sobre o que parecem ser as características essenciais da abstracção reflexiva e o seu papel na Matemática superior, defende que as ideias de Piaget podem ser estendidas e aplicadas ao PMA reorganizando-as ou reconstruindo-as para formar uma teoria coerente do conhecimento matemático e da sua construção. Assim, sugere que a construção de vários conceitos na Matemática avançada pode ser descrita em termos de cinco formas de construção na abstracção reflexiva (quatro das quais Piaget considerou no desenvolvimento do pensamento lógico das crianças): (i) Interiorização – 'translação' de uma sucessão de acções materiais ou mentais num sistema de operações interiorizadas; (ii) Coordenação – construção de um novo processo a partir da composição de dois ou mais processos já existentes; (iii) Encapsulação – conversão de um processo dinâmico num objecto estático e o seu reminiscente de reificação; (iv) Generalização – extensão do domínio de aplicação de esquemas já existentes a uma colecção alargada de fenómenos; e (v) Reversibilidade – uma vez que o processo existe internamente é possível, para o indivíduo, pensar nele ao contrário, não necessariamente no sentido de o anular, mas como meio de construir um novo processo que consiste em inverter o processo original.

Dubinsky (1991) apresenta a noção de abstracção reflexiva como o quadro teórico para explicar "o que é necessário acontecer para construir estruturas matemáticas", incluindo as avançadas, e apresenta-a como "a construção de objectos mentais e acções mentais sobre esses objectos" (p. 102). Deste modo, a tendência de um indivíduo para invocar um esquema de forma a compreender, lidar com, organizar ou dar significado a uma situação problema é o seu conhecimento de um conceito matemático. Considerando então cada um dos cinco tipos de construção na abstracção reflexiva apresentados, no contexto de PMA, Dubinsky (1991) descreve como novos objectos, processos e esquemas podem ser construídos a partir dos já existentes.

Todos os 'objectos' matemáticos devem ser construídos pelos indivíduos em determinada altura do seu desenvolvimento matemático. Uma 'acção' é qualquer transformação física ou mental de objectos que ocorre como reacção a estímulos que o indivíduo percebe como externos. A acção tende a controlar o indivíduo. Embora uma concepção de uma acção seja muito limitada, as acções formam o início crucial de compreensão de um conceito. Quando uma acção é repetida e o indivíduo reflecte sobre ela, deve começar a estabelecer um controle consciente sobre a mesma. Isto significa que alguma construção interna é realizada relacionada com a acção mas agora, não necessariamente dirigida por estímulos externos. Podemos então dizer que a acção foi interiorizada e passou a ser um 'processo'. A interiorização permite estar consciente de uma acção, para reflectir sobre ela e para combiná-la com outras acções. O indivíduo estabelece um controlo sobre a acção e é capaz de fazer mais com ela, por exemplo ser capaz de descrever ou reflectir sobre todos os passos da transformação sem necessidade de a realizar explicitamente. Em contraste a uma acção, um processo é percebido pelo indivíduo como sendo interno e sob o seu controle, em vez de alguma coisa feita em resposta a indicações externas. A interiorização de acções é uma forma de construção de processos. Outra forma é trabalhar com processos existentes para formar novos. Isto pode ser feito, por exemplo por 'reversibilidade'. Outra forma de construir novos processos a partir de antigos é compor ou coordenar dois ou mais processos.

Com a reflexão do indivíduo sobre as operações aplicadas a um processo particular, torna-se independente do processo como um todo, percebe que essas transformações (quer sejam processos, quer sejam acções) podem actuar sobre elas e é capaz de construir essas transformações, então já está a pensar nesse processo como um objecto. Neste caso, dizemos que o processo foi encapsulado num objecto. Esta capsulação é alcançada quando o indivíduo está atento à totalidade do processo, percebe que transformações podem agir sobre ele e é capaz de construir tais transformações.

A figura seguinte representa o modelo de construção de esquemas proposto pelo autor:

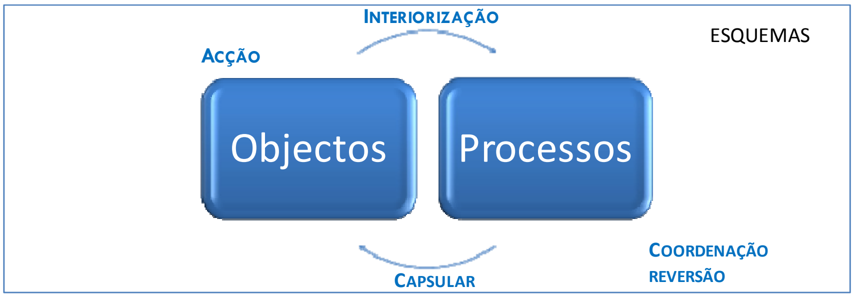


Figura 2.3 – Esquemas e a sua construção (adaptado de Dubinsky, 1991, p. 107)

Como indicado na figura, não se deve pensar no esquema de uma forma estática, mas como uma actividade dinâmica realizada pelo indivíduo. No decorrer da realização de uma acção ou processo num objecto, é muitas vezes necessário desencapsular o objecto para voltar ao processo de onde veio com o objectivo de usar as suas propriedades na sua manipulação. Os objectos podem ser desencapsulados para obter os processos dos quais eles provêm e é importante em Matemática que os indivíduos sejam capazes de fazer este movimento nos dois sentidos entre a concepção do objecto e o processo de uma dada ideia matemática.

Mais recentemente, Dubinsky (2003) apresenta um esquema semelhante ao anterior, cuja principal alteração se verifica na seta inferior que passou a ter um duplo sentido, reforçando a importância do capsular e desencapsular no balanço entre processos e objectos.

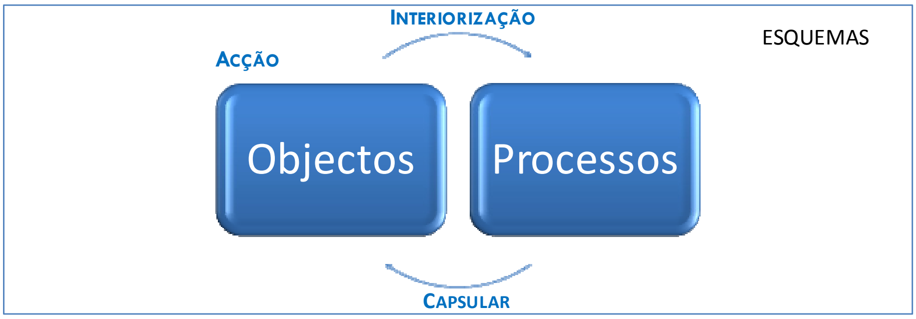


Figura 2.4 – Esquemas e a sua construção (adaptado de Dubinsky, 2003)

Cotrill, Dubinsky, Nichols, Schwingerdorf, Thomas e Vidakovic (1996) descrevem o conhecimento matemático de um indivíduo como "a sua tendência para responder, num contexto social, a um determinado problema pela (re)construção e organização, na sua mente, de processos matemáticos e objectos com os quais se lida com a situação" (p. 3). Com base nesta perspectiva os autores consideram a existência de três tipos gerais de conhecimento matemático, as 'acções', os 'processos' e os 'objectos', que estão organizados em estruturas que designam por 'esquemas'. Defendem, no entanto, que é possível aplicar acções a um esquema e, tal como nos processos, um indivíduo pode reflectir sobre um *esquema* e transformá-lo num novo objecto. Assim, podemos considerar pelo menos duas formas de construir objectos: a partir dos processos e a partir dos esquemas. No desenvolvimento desta teoria, denominada de APOS (*actions, processes, objects, schemas*), considera-se que os objectos podem ser transformados por acções de nível superior, levando a novos processos, objectos e esquemas. Desta forma a expansão dos esquemas pode ser representada por uma espiral de acções, processos e objectos.

Teoria da Reificação

Sfard (1987, 1989, 1991) e Sfard & Linchevki (1994) desenvolvem uma teoria sugerindo a construção de conceitos matemáticos em três fases: interiorização, condensação e reificação. Sfard (1989, 1991) considera que as reconhecidas dificuldades dos alunos na construção de conceitos matemáticos podem estar relacionadas com a forma como os conceitos matemáticos podem ser concebidos e postula a sua noção de reificação numa teoria de concepções operacional e estrutural, a primeira focando-se nos processos e a segunda nos objectos. Neste sentido, a autora defende que é possível encontrar duas formas diferentes de ver uma entidade matemática: (i) uma concepção, que parece prevalecer na Matemática actual e que é designada pela autora como "concepção estrutural", segundo a qual as noções matemáticas são vistas e referidas como se fossem objectos reais, como estruturas estáticas permanentes que existem algures no espaço e no tempo e que podem ser manipuladas de acordo com certas regras e combinadas em estruturas mais complexas e (ii) uma concepção onde, em vez da definição de uma entidade, ela aparece ligada a um certo processo que é necessário efectuar ou como um método. Este tipo de abordagem refere-se essencialmente a processos, algoritmos e acções reflectindo uma "concepção operacional" da noção (Sfard, 1991).

Para a autora, estas duas concepções são complementares e imprescindíveis para uma compreensão profunda da Matemática: "Os termos operacional e estrutural, embora extremamente diferentes, referem-se a facetas inseparáveis da mesma coisa" (Sfard, 1991, p. 9). De facto, a abordagem operacional é indispensável (e muitas vezes suficiente) para a compreensão de um conceito. No entanto, o conhecimento concebido desta forma só pode ser armazenado em esquemas cognitivos sequenciais não estruturados e, por isso, inadequados à dimensão da memória de trabalho. Isto faz com que as ideias puramente operacionais tenham que 'ser processadas aos pedaços', isto é, de uma maneira enfadonha que pode levar a um maior esforço cognitivo e ao sentimento perturbador de uma compreensão só local e, por isso, insuficiente (Sfard, 1987). Estas longas cadeias de informação obtidas operacionalmente, que ocupam uma grande quantidade de memória, têm que ser compactadas em unidades autónomas (ou reificadas) de forma a dotar os esquemas cognitivos de uma estrutura hierárquica facilitando grandemente o esforço cognitivo. O desenvolvimento de uma concepção estrutural proporciona um decréscimo desse esforço acompanhado de um aumento de eficácia da sua utilização na resolução de problemas, traduzindo-se num sentimento de incremento de competência e de compreensão. A "reificação", assim chamada por Sfard, condensa e consolida a informação facilitando depois a sua recuperação a partir da memória.

Embora a aprendizagem não se processe de igual modo em todos os indivíduos, parece ser possível identificar, nos diferentes processos de aprendizagem e independentemente das abordagens de ensino utilizadas, algo que lhes é comum. Assim, face a uma nova noção matemática a concepção operacional é normalmente a primeira a ser desenvolvida (e, não raramente a única) e a transição, das operações para os objectos abstractos, é, nas palavras de Sfard (1991), um processo longo e difícil pois "o que parece ser um processo num nível, tem que ser transformado num objecto abstracto autónomo num nível mais elevado, para poder funcionar como uma unidade básica em construções matemáticas mais avançadas" (p. 16). Sfard defende assim, com base na dualidade processo-objecto, inerente à maioria dos conceitos matemáticos e na análise histórica da formação de alguns conceitos matemáticos, que a concepção operacional é a primeira a emergir no processo de desenvolvimento conceptual e a abordagem estrutural será, portanto, um estado mais avançado desse desenvolvimento.

Baseada na perspectiva do desenvolvimento histórico, Sfard (1991) propõe ainda um modelo para o processo de transição entre estas concepções composto por três estádios que correspondem a três graus de estruturação crescente:

(i) interiorização – Esta primeira fase pode considerar-se um estádio pré-conceptual onde o indivíduo se familiariza com determinados processos que eventualmente vão dar origem a um novo conceito. Estes processos e operações são realizados sobre objectos matemáticos de nível inferior (elementares), já familiares, que se vão tornando mais acessíveis para o indivíduo, à medida que este vai ficando perito na sua realização, até ao ponto de ser capaz de pensar sobre o que aconteceria sem ter realmente de os efectuar. A interiorização representa conhecimento dos processos, quando "de forma a falar sobre objectos matemáticos, devemos ser capazes de lidar com o produto de alguns processos sem a preocupação dos processos em si" (Sfard, 1991, p. 10). Considera-se que o processo foi interiorizado quando puder ser realizado mentalmente (através de representações mentais) e quando, para poder ser considerado, analisado e comparado, não precisar de ser efectuado no momento;

(ii) condensação – A segunda fase é um longo período com uma abordagem predominantemente operacional, de compressão dos processos anteriores, eventualmente complicados ou longos, em entidades mais fáceis de manipular. Os indivíduos desenvolvem a capacidade de pensar sobre um dado processo como um todo, sem necessidade de entrar em detalhes. É nesta fase que Sfard (1991) considera que nascem os novos conceitos. O progresso neste estádio manifesta-se quando o indivíduo for capaz de combinar vários processos já conhecidos, realizar comparações, generalizar e alternar entre as diferentes representações de um conceito. Esta fase de condensação mantém-se enquanto a nova entidade permanecer firmemente ligada a um determinado processo;

(iii) reificação – A reificação acontece quando o indivíduo for capaz de, subitamente, conceber a nova entidade matemática como um objecto permanente, com características próprias, como um todo integrado já afastado dos processos que lhe deram origem (Sfard, 1987, 1991). A nova entidade é rapidamente desligada do processo que lhe deu origem e começa a adquirir o seu significado pelo facto de pertencer a uma determinada categoria. Esta última fase é algo que acontece de uma forma instantânea (súbita), ao contrário da interiorização e da condensação que são processos graduais e quantitativos. Este estádio é também o ponto onde começa a interiorização de conceitos de nível superior pois uma vez reificado, o conceito pode servir de base à formação de novos conceitos de nível superior. A existência, para o indivíduo, de um novo objecto matemático, permite que todo um novo ciclo se inicie – a reificação desta entidade inicia a fase de interiorização para a formação de uma nova entidade mais abrangente (Sfard, 1991). Sem reificação as concepções matemáticas permanecerão puramente operacionais.

O esquema da figura 2.5 pretende mostrar o modelo hierárquico descrito, cuja natureza está implícita nas definições de interiorização, condensação e reificação. De acordo com o modelo, um patamar não pode ser alcançado antes que os outros tenham sido ultrapassados. Assim, enquanto os objectos de nível inferior não estiverem disponíveis, os processos de nível superior não podem ser realizados por falta de uma entrada. Por outro lado, antes de surgir a necessidade real de considerar os processos de nível inferior como objectos acabados, o aluno pode não ter motivação para considerar a existência de 'coisas' novas inatingíveis, especialmente se o novo objecto for de tal forma distante da intuição (contra-intuitivo).

Este modelo de formação de conceitos, implica que uma determinada noção matemática só deve ser considerada completamente desenvolvida quando puder ser concebida quer operacional quer estruturalmente.

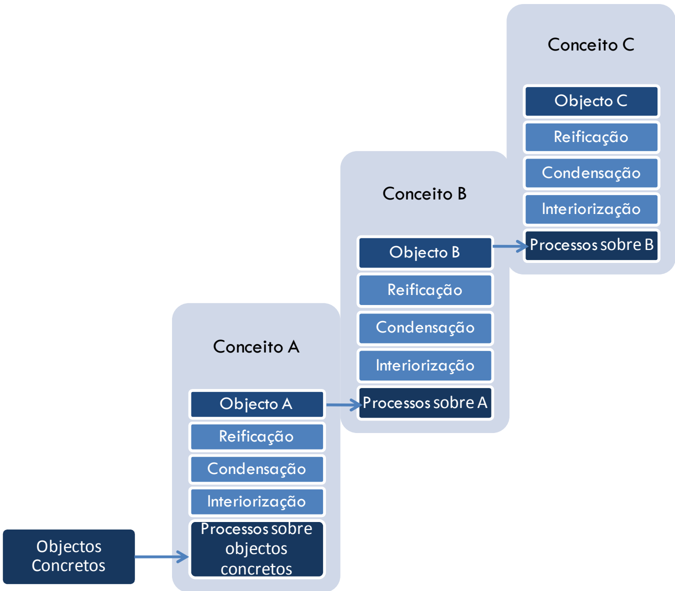


Figura 2.5 – Modelo hierárquico de formação de conceitos (adaptado de Sfard, 1991, p. 22)

A teoria de Sfard, ao ver a construção de novos objectos mentais a partir de acções cognitivas em objectos já estabelecidos, concentra-se nos últimos desenvolvimentos em indivíduos mais velhos que já construíram uma variedade de objectos cognitivos. Também aqui é fundamental a teoria de Piaget para explicar como é que são construídas as primeiras entidades mentais a partir de acções preliminares envolvendo percepção e acção no mundo físico. Assim que a criança tome os passos iniciais na abstracção empírica ou pseudo-empírica para construir entidades mentais, estas tornam-se disponíveis para 'agir sobre' e permitem uma hierarquia teórica de construções mentais.

Os símbolos na transição do pensamento processual para o pensamento conceptual (ou abordagem proceptual)

Sfard (1989) comenta sobre a dualidade das noções matemáticas enquanto concebidas como processos e objectos ao mesmo tempo. É focando-se nesta dualidade que Gray e Tall (2001) propõem uma teoria sobre a construção cognitiva em Matemática. Nesta abordagem, os conceitos matemáticos são construídos partindo da realização de determinados procedimentos matemáticos exactos, que por sua vez vão sendo organizados de uma forma mais flexível e eficiente dando origem a determinados processos, que podem ser representados de forma simbólica. A combinação de processos e conceitos, com o símbolo operando dualmente para cada um, onde o processo pode ser usado para fazer Matemática e o objecto para pensar sobre ele, é definida por Gray e Tall (1994) como "proceito".

Segundo Tall (1995), a espécie humana, através de actividades de interacção no meio ambiente, desenvolve conceitos abstractos altamente subtis. Este desenvolvimento começa com a habilidade de perceber e agir sobre objectos do mundo exterior e reflectir sobre estas acções para construir teorias. A percepção do mundo inclui o estudo do espaço e da forma. As acções sobre o mundo são representadas por símbolos. A reflexão na percepção e acção em Matemática leva, eventualmente, ao desejo de uma teoria axiomática consistente baseada em definições formais e deduções. Gray et al. (1999) defendem que a percepção, a acção e a reflexão ocorrem segundo várias combinações num dado momento e a ênfase numa ou mais destas actividades cognitivas fundamentais, pode levar não só a diferentes tipos de Matemática mas também a um espectro de sucesso e falha. Um desses tipos de Matemática é a Matemática simbólica que se desenvolve no sentido de construir a Matemática axiomática, como mostra a figura seguinte:

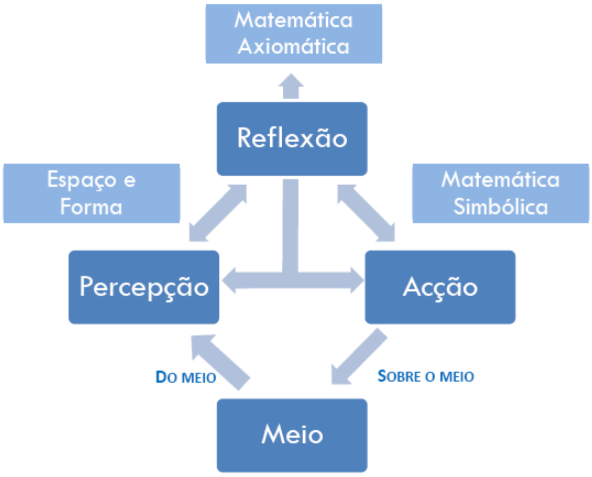


Figura 2.6 – Combinando reflexão, percepção e acção (adaptado de Tall et al., 2001, p. 81)

De acordo com Tall, Gray, Bin Ali, Crowley, De Marois, McGowan, Pitta, Pinto, Thomas e Yousof (2001), quando um indivíduo actua em objectos, a percepção e acção estão intimamente relacionadas. O foco em objectos é limitado ao que pode ser visualizado. No entanto, a maioria das realizações matemáticas requer métodos mais eficientes de representação para utilizar a combinação de um grande armazenamento de memória e pouca atenção. Os símbolos permitem que o ser humano disponha de uma forma simples de lidar com quantidades, resolver problemas e fazer previsões. Eles simplesmente actuam como *pivots* entre processos e o símbolo pensado como um conceito, permitindo uma ligação entre o foco consciente na imaginação para pensar e as operações inconscientes interiorizadas para levar a cabo processos matemáticos.

A dupla utilização do símbolo enquanto processo e conceito muitas vezes começa por uma familiarização com o processo, enquanto procedimento realizado passo a passo e depois torná-lo rotineiro de forma a poder ser manipulado sem necessidade de uma atenção consciente aos detalhes, por vezes bastante sofisticados. Gray e Tall (1994) vêm um proceito como algo flexível que pode ser (re)moldado e (re)construído. À medida que o indivíduo progride, o proceito cresce em riqueza interna ganhando mais possibilidades de uma manipulação flexível. É no uso de proceitos que os autores consideram existir a maior diferença entre o desempenho dos mais e menos hábeis em Matemática. Isto dá um espectro de desempenho no qual é possível, em certos estados, ter alunos com diferentes capacidades a realizar com sucesso um dado problema rotineiro, ainda que o possível desenvolvimento futuro seja bastante diferente.

Estes autores consideram ainda que os alunos que estão mais orientados para o desenvolvimento de procedimentos ficam limitados (a um procedimento particular) e focam a sua atenção nos seus passos enquanto os que vêem o simbolismo como processos ou conceitos têm um processamento cognitivo mais eficiente. Isto significa que aqueles que têm a sua atenção focada no processual sentem dificuldades cada vez maiores para enfrentar na aprendizagem de Matemática nova enquanto os mais capazes se focam também nas qualidades essenciais do simbolismo enquanto processo e conceito. As diferentes formas de combinar e dar riqueza à estrutura conceptual de um símbolo, que vêm da combinação dos pensamentos conceptual e processual, são designadas por Gray e Tall (1994) como sendo o "pensamento proceptual". Enquanto o pensamento processual pode ser caracterizado por se focar no procedimento e na ajuda física ou quase física que o suporta, o pensamento proceptual pode ser caracterizado pela habilidade de comprimir fases na manipulação dos símbolos para que estes sejam vistos como objectos que podem ser decompostos e recombinados de forma flexível. O pensamento proceptual desempenha assim um papel fundamental na compreensão dos conceitos matemáticos sendo o simbolismo e a sua ambiguidade o veículo privilegiado para o desenvolvimento deste pensamento.

É apenas quando os símbolos usados para representar o processo são vistos como representantes de conceitos manipuláveis que o indivíduo tem a flexibilidade proceptual simultaneamente para fazer Matemática e também manipular mentalmente os conceitos a um nível mais sofisticado (Gray & Tall, 1994).

Para explicar o desempenho nos processos matemáticos Gray e Tall (1994) partem da natureza das actividades matemáticas onde os termos procedimento, processo e proceito representam uma sequência no desenvolvimento cada vez mais sofisticada. Estes autores adoptam uma distinção entre o procedimento e o processo onde o termo procedimento é um algoritmo de passo a passo no qual o indivíduo precisa de completar antes de tomar o seguinte. O termo processo é usado num sentido mais alargado para incluir qualquer número de procedimentos (que tenham o mesmo efeito geral), que são vistos como um todo, sem necessidade de referir os passos individuais ou mesmo diferentes procedimentos. Assim, conhecer um procedimento específico permite ao indivíduo fazer uma manipulação específica. Ter uma ou mais alternativas disponíveis permite maior flexibilidade e eficiência para escolher o caminho mais adequado para um determinado propósito. Esta abordagem pode ser esquematicamente traduzida pela figura 2.7

seguinte, onde é possível observar uma crescente sofisticação do desenvolvimento proceptual com o tempo.

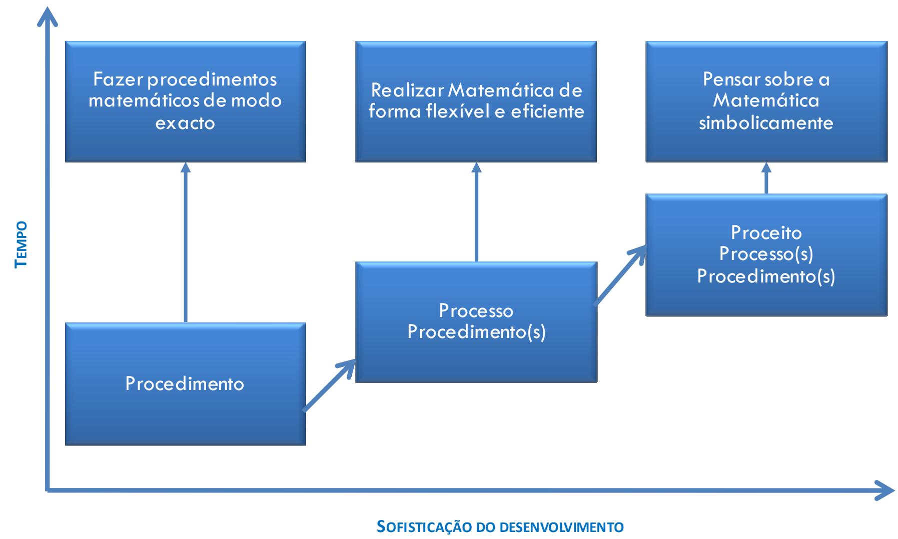


Figura 2.7 – Desenvolvimento na execução dos processos matemáticos (adaptado de Gray et al., 1999, p. 121)

É claro que o espectro de procedimento-processo-proceito não é uma classificação em classes disjuntas. É uma categorização num espectro de crescente sofisticação no qual as categorias se misturam umas nas outras, mesmo regressando de vez em quando a um caso mais primitivo. O que importa com a crescente sofisticação é que um processo normalmente pode ser realizado por um procedimento específico finito. O proceito relaciona-se com um conceito pensável e o processo levado a cabo pelos seus procedimentos correspondentes (Gray & Tall, 2001).

Conceito imagem versus Conceito definição

Menos comprometidos com a expandida abordagem piagetiana que os outros investigadores, Vinner e Hershkowitz (1980) e Tall e Vinner (1981) destacam o papel da estrutura conceptual dos indivíduos quando introduzem os termos "conceito imagem" e "conceito definição". Para os referidos autores, estes termos e as relações que se estabelecem entre ambos desempenham um papel fundamental na explicação dos processos cognitivos de aquisição de conceitos.

Muitos conceitos que usamos no quotidiano não são formalmente definidos, aprendemos a reconhecê-los pela experiência e pelo seu uso em determinados contextos. Estes conceitos vão sendo construídos ao longo do tempo sem necessidade de uma definição precisa ou formal e podem ser redefinidos no seu significado e interpretados de forma diferente quando o indivíduo encontra novos estímulos e/ou amadurece. Quando um conceito é evocado, a estrutura cognitiva complexa existente na mente de todos os indivíduos permite uma variedade de imagens mentais (sejam elas pictóricas, simbólicas ou outras) e são trazidos a jogo, consciente ou inconscientemente, um conjunto de processos associados que podem afectar quer o seu significado quer o seu uso. Para Tall e Vinner (1981):

> Iremos usar o termo conceito imagem para descrever a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, a qual inclui todas as imagens mentais e as propriedades e processos associados (...). Enquanto o conceito imagem se desenvolve não precisa de ser coerente todo o tempo (...). Iremos referir-nos à porção do conceito imagem que é activada num determinado tempo a conceito imagem evocado. Em diferentes tempos, imagens conflituosas podem ser evocadas. (Tall & Vinner, 1981, p.152)

O "conceito imagem" é assim qualquer coisa não verbal associado, na mente do indivíduo, ao conceito. Este pode não ser globalmente coerente e pode ter aspectos que são diferentes do conceito formal. A experiência anterior à apresentação da definição formal não só afecta a forma como os indivíduos formam as representações mentais dos conceitos (Tall, 1991) mas, frequentemente, torna-se manifesta através dos seus esforços para resolver problemas com um conceito imagem inapropriado (Tall & Vinner, 1981). Apenas se pode falar de conceito imagem em relação a um indivíduo específico, embora possa reagir de forma diferente a um mesmo termo em situações diferentes. Para descrever a parte da memória recordada num dado contexto Tall e Vinner (1981) usam o termo "conceito imagem evocado", que não é necessariamente tudo o que determinado indivíduo sabe sobre certa noção.

A definição de um conceito, se existe, é um assunto diferente. As representações visuais, as impressões e experiências associadas ao conceito podem ser traduzidas por formas verbais. Tall e Vinner (1981) olham para o *conceito definição* como a forma das palavras usadas para especificar esse conceito. É a forma de palavras que o estudante usa para a sua própria explicação do seu conceito imagem. Segundo estes autores, o conceito definição pode ser aprendido por um indivíduo de forma rotineira ou mais significativamente aprendido e relacionado com maior ou menor grau ao conceito como um todo. Também pode ser uma reconstrução pessoal da definição por parte do estudante a partir da definição, assumindo a forma das palavras que usa para transmitir a explicação do seu conceito imagem. Quer o conceito definição lhe seja dado ou construído por ele próprio, pode variar de tempos a tempos. Desta forma, um "conceito definição pessoal" pode diferir de um conceito definição formal aceite pela comunidade de matemáticos.

Conhecer o conceito definição profundamente não garante a compreensão do conceito. Adquirir ou compreender um conceito, acredita Vinner (1991), significa formar uma imagem dele. Para alguns conceitos possuímos em simultâneo um conceito definição e um conceito imagem, mas em muitos outros isso não acontece. Alguns conceitos podem, no entanto, ser introduzidos por meio da definição, ajudando esta a formar o conceito imagem. A partir do momento em que o conceito imagem se forme a definição pode permanecer inactiva ou mesmo esquecida quando manipulamos esse conceito. O autor defende ainda que o papel da definição aparece como suporte para a construção do conceito imagem, que uma vez construído pode dispensar o conceito definição.

Vinner (1991) considera, ainda, que cada um dos conceitos imagem e definição está associado a uma célula diferente (não necessariamente biológica) na estrutura cognitiva. Estas células podem estar vazias ou a interagir. Considera-se que a célula do conceito imagem está vazia enquanto nenhum significado for associado com o nome do conceito. As definições, em contextos escolares, têm um importante papel. Não só ajudam a formar o conceito imagem mas também têm muitas vezes, um papel crucial nas tarefas cognitivas uma vez que apresentam potencial para alertar para algumas armadilhas que são muitas vezes estabelecidas pelo conceito imagem. Ao analisar a introdução da definição a estudantes, que já têm o conceito imagem, encontra três cenários possíveis: (i) o conceito imagem muda para acomodar a definição; (ii) o conceito imagem mantém-se como está, a definição é esquecida ou distorcida; e (iii) o conceito imagem mantém-se tal como está e a definição está presente mas as duas células não estão ligadas e são evocadas independentemente.

Pinto e Tall (1996) sugerem que a situação pode ser mais complexa, uma vez que o conceito imagem pode mudar quando a definição é introduzida mas incluindo aspectos que não reflectem o conceito definição. Esses aspectos podem ser distorcidos, implicados por interpretações idiossincráticas e não contribuem para a acomodação da definição. A porção do conceito imagem que é construído através de deduções a partir da definição formal é referida como "conceito imagem formal" (Tall, 1997).

A partir da especificação do conceito definição e do conceito imagem, Vinner (1983) apresenta também, através de diagramas, um modelo descritivo da construção do conhecimento matemático onde a formação dos conceitos assenta numa interacção entre os dois conceitos, embora se possam constituir de forma independente:

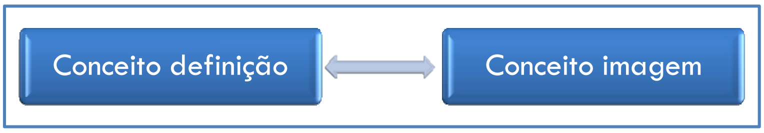


Figura 2.8 – Acção recíproca entre conceito imagem e conceito definição (adaptado de Vinner, 1983)

No ensino de conceitos matemáticos avançados, a ênfase é colocada na definição. Segundo Vinner (1983), seria desejável que um conceito se forme por meio do conceito definição e que seja completamente controlado por este.

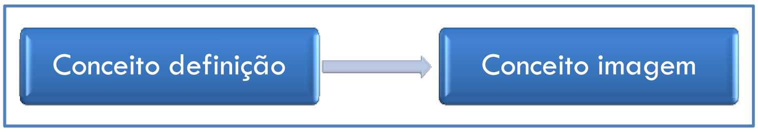


Figura 2.9 – Crescimento cognitivo de um conceito formal (adaptado de Vinner, 1983)

No entanto, a formação dos conceitos não é única e depende em grande parte do desempenho dos indivíduos. Desta forma, quando uma tarefa cognitiva é apresentada a um aluno, é desejável que as células do conceito imagem e do conceito definição sejam activadas para proporcionar uma resposta a esta tarefa. Nesta actividade podem desencadear-se várias acções entre ambas as células, como previsto pelo modelo de Vinner (1983). Uma acção consiste na consulta da célula do conceito definição seguida de uma acção recíproca entre ambas com o objectivo de proporcionar uma resposta à tarefa:

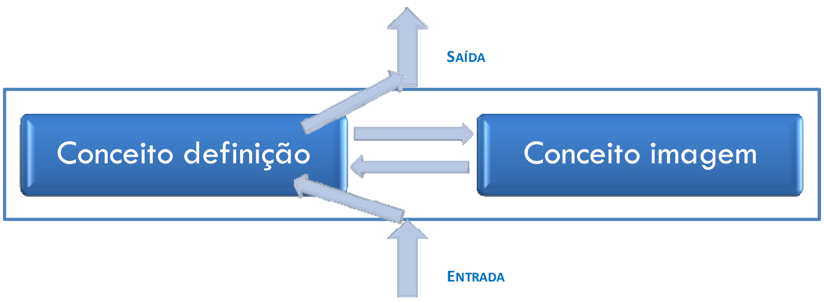


Figura 2.10 – Acção recíproca entre definição e imagem (adaptado de Vinner, 1983)

Outra acção consiste apenas numa consulta da célula do conceito definição. Neste caso o conceito imagem não tem qualquer interferência na resposta e podemos considerar que se trata de um processo cognitivo que assenta numa dedução formal pura:

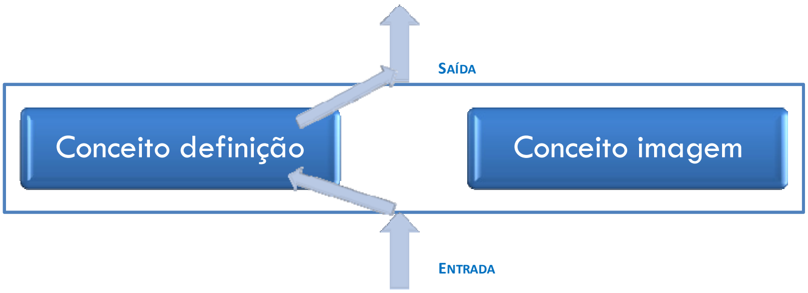


Figura 2.11 – Dedução formal pura (adaptado de Vinner, 1983)

Uma terceira acção consiste numa consulta da célula do conceito imagem seguida da do conceito definição. Neste caso estamos perante uma dedução que segue o pensamento intuitivo:

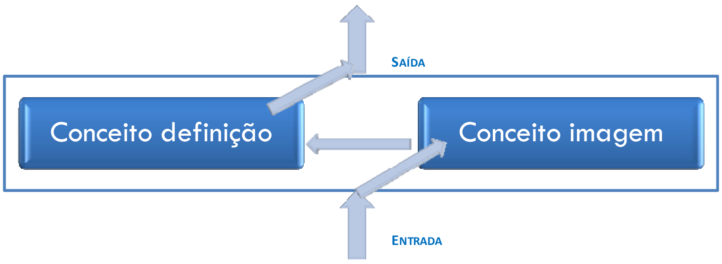


Figura 2.12 – Dedução que segue o pensamento intuitivo (adaptado de Vinner, 1983)

Em nenhum destes casos acima descritos é tomada uma decisão sem antes ser consultado o conceito definição. Este não é, no entanto, o processo que é usado a maior parte das vezes, por se tratar de um processo cognitivo contrário à nossa natureza. Vários investigadores (Davis & Vinner, 1986; Domingos, 2003; Gray & Pinto, 1995; Pinto & Tall, 1996; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1976, 1983; Vinner & Dreyfus, 1989) mostram que na resposta a uma tarefa cognitiva ou situações problema os estudantes não consultam usualmente o seu conceito definição. Em vez disso, evocam o seu conceito imagem, muitas vezes formado através de experiências do dia-a-dia em conjunto com exemplos, teoremas e outras ideias dadas na aula. A célula do conceito definição acaba por não ser consultada, mesmo que não esteja vazia.

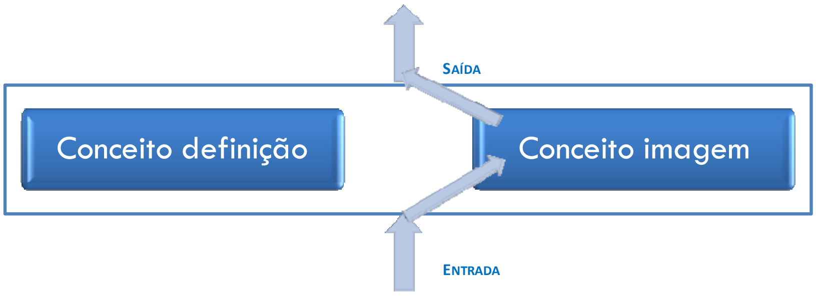


Figura 2.13 – Resposta intuitiva (adaptado de Vinner, 1983)

Esta situação pode acontecer quando algumas definições são demasiado complicadas de tratar, não ajudando à criação de conceitos imagem na mente dos alunos. Por outro lado, há definições que podem fazer sentido num dado momento, apoiadas por exemplos específicos, mas a partir da altura em que os alunos formem o seu conceito imagem, as definições podem ser esquecidas ou permanecerem inactivas. O modelo para este processo que ocorre na prática baseia-se apenas na consulta do conceito imagem seguido de uma resposta com base neste, tratando-se de uma resposta intuitiva.

Resumindo, os processos e os objectos são elementos chave nas várias teorias de aprendizagem. A teoria da Reificação de Anna Sfard propõe que a execução dos processos sobre objectos concretos proporciona o desenvolvimento das fases de interiorização, condensação e reificação. Ed Dubinsky também realça o papel dos objectos sobre os quais são realizados determinados processos que posteriormente são capsulados em novos objectos matemáticos. Pelo seu lado, David Tall concebe a visão proceptual dos conceitos (ou objectos) através da realização de procedimentos e processos que vão sendo cada vez mais sofisticados e que culminam na possibilidade de pensar sobre a Matemática simbolicamente, como proceito. Uma das preocupações fundamentais destes autores está relacionada com o ensino-aprendizagem e com a forma como os conceitos são abordados. Assim, as teorias apresentadas servem, não só para descrever a construção dos conceitos matemáticos, como podem sugerir explicações de algumas das dificuldades que os alunos têm com muitos destes conceitos.

2.2. Problemas e Actividades de Investigação no ensino da Matemática

Problemas e resolução de problemas

Quando se pretende realçar a importância da resolução de problemas no ensino da Matemática, torna-se pertinente definir o que se entende por problema, já que este termo não é objecto de consenso entre investigadores e professores. Os vários significados que se associam a problema reflectem as diferentes visões que os autores têm sobre a Matemática e a aprendizagem da Matemática que, por sua vez, são influenciadas pelas suas concepções, experiências e conhecimentos. Este facto tem dificultado a sistematização dos resultados das numerosas investigações realizadas na área da educação matemática (Ernest, 1992).

A clarificação do significado de problema tem sido uma preocupação para numerosos autores, a avaliar pela vasta literatura que tem abordado esta temática. Das diversas perspectivas para definir problema, no campo do ensino da Matemática, destaco, em particular, as que tomam como referência a relação do indivíduo com a situação e as que concentram a sua atenção nas características da própria tarefa. No primeiro caso, diversos autores (Kantowski, 1977; Lester, 1980; Schoenfeld, 1985a) tomam como referência a definição de Pólya (1975) e consideram que um indivíduo está perante um problema quando tem que lidar com uma situação que desconhece. Assim, para Kantowski (1977), "um indivíduo está perante um problema quando se confronta com uma questão a que não pode dar resposta ou com uma situação que não sabe resolver, usando os conhecimentos imediatamente disponíveis" (p. 163).

Para Schoenfeld (1985a), o significado de problema não assenta em qualquer característica ou propriedade da tarefa, mas sim numa relação particular entre o indivíduo e a tarefa. A definição com que se identifica é a de considerar problema "uma questão difícil ou que levanta dúvidas; uma questão de pesquisa, discussão ou pensamento; uma questão que excita a mente" (p. 74). Esta abordagem é subscrita também por Lester (1980) que afirma que um problema é uma situação para a qual um indivíduo não dispõe de um método imediato de resolução. Este autor acrescenta ainda o interesse na procura de uma solução como factor importante para que uma situação seja considerada um problema por parte do indivíduo:

> Um problema é uma situação na qual um indivíduo ou grupo é chamado a realizar uma tarefa para a qual não há um algoritmo imediatamente disponível que determine completamente o método de solução (...). Deve acrescentar-se que se supõe um desejo por parte do indivíduo ou do grupo para realizar a tarefa. (Lester, 1980, p. 287)

A necessidade de um indivíduo se empenhar activamente na procura de uma solução é salientada também por Ponte (1992): "Um problema consiste numa tarefa para a qual o aluno não dispõe de um método imediato de resolução, mas em cuja solução se empenha activamente" (p. 95).

Nesta perspectiva, a noção de problema é relativa às pessoas envolvidas. Uma dada tarefa pode requerer esforços significativos a alguns indivíduos, enquanto que para outros pode ser um mero exercício de rotina, bastando-lhes recordar factos já aprendidos para a resolver. A mesma tarefa pode ainda ser interpretada e sentida de modo diferente consoante o resolvedor de cada momento e, também, consoante o momento de cada resolvedor. É neste sentido que Dumas-Carré, Caillot, Torregrossa e Gil (1989) definem situação problemática como sendo:

> Uma situação ambígua que levanta algumas dificuldades na procura de um caminho a seguir, embora essa ambiguidade e essas dificuldades não sejam algo intrínseco à situação, mas sim uma característica da interacção entre a situação e aquele que a resolve. Um problema não é um objecto tendo uma existência autónoma é uma interacção entre uma situação e um indivíduo em determinado momento. (p. 140).

Outros autores, como por exemplo Blum e Niss (1991), ressaltam a importância do contexto. Estes autores entendem por problema "uma situação que acarreta consigo certas questões abertas que desafiam intelectualmente quem não está na posse imediata de métodos directos, procedimentos ou algoritmos suficientes para responder às questões" (p. 37).

Do mesmo modo que existem várias perspectivas sobre o que é um problema, também a expressão 'resolução de problemas' aparece associada a significados diversos conforme os autores. Para alguns trata-se de um processo para atingir uma resposta à situação problemática:

> Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum caminho é conhecido de imediato, é encontrar um caminho para sair de uma dificuldade, é encontrar um caminho em torno de um obstáculo, é atingir um objectivo desejado que não é imediatamente acessível, e fazê-lo com os meios apropriados. (Pólya, 1980, p. 1)

Para Mayer (1985), resolver um problema é descobrir o caminho que leva de uma situação inicial a outra situação final e que envolve uma série de operações mentais. Também Lester (1980) considera resolver um problema como realizar um conjunto de acções para atingir o objectivo pretendido.

As características diferenciais do contexto, da tarefa e do sujeito são também elementos bastante realçados na literatura sobre o que significa resolver problemas. Se enfatizarmos as características da tarefa estamos a medir o seu grau de dificuldade, o tipo de conhecimento que requer e o contexto a que se refere. Nesta linha podemos destacar Kantowski (1980), para quem "um problema é uma situação para a qual o indivíduo que a enfrenta não possui algoritmo que garanta a solução. O conhecimento relevante dessa pessoa tem de ser aplicado de uma nova forma para resolver o problema" (p. 195). No mesmo sentido se manifestam Carl (1989) para quem "a resolução de problemas é o processo de aplicação dos conhecimentos previamente adquiridos a situações novas e não familiares" (p. 471). Pela sua parte, Agre (1982) realça a existência de uma dificuldade: "Para qualificar como problema o processo de resolução ou de definição tem que se crer que possui ao menos um pouco de dificuldade" (p. 130).

Outro autor, Nunokawa (2005), valoriza sobretudo os processos do sujeito ao assumir que a resolução de problemas é um processo de pensamento no qual o resolvedor tenta dar sentido à situação problemática usando o conhecimento matemático que tem e tenta obter nova informação sobre essa situação até que consiga resolver a "tensão ou ambiguidade". O autor representa esta noção de resolução de problemas através do diagrama da figura seguinte.

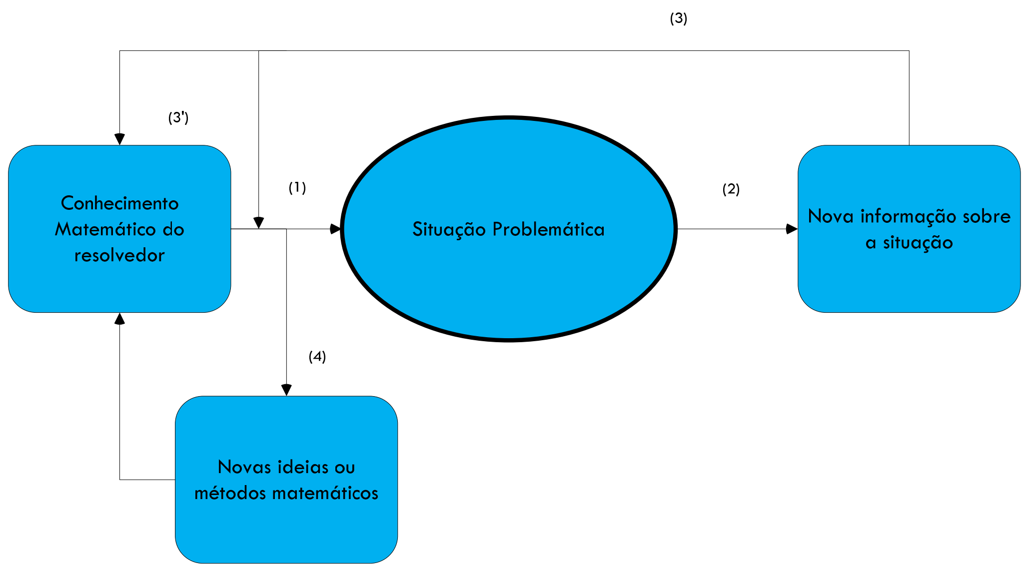


Figura 2.14 – Concepção de resolução de problemas matemáticos (Adaptado de Nunokawa, 2005, p. 328)

Para este autor, basicamente, a resolução de um problema matemático tem duas fases, a tentativa de aplicação do conhecimento matemático através da exploração da situação problemática (1) e obtenção de peças de informação sobre a situação problemática (2). Se a tensão ou a ambiguidade não for completamente resolvida, a exploração da situação problemática continua, tirando partido da informação obtida (3). Quando o resolvedor identifica algumas entidades matemáticas na situação e encontra nova informação sobre essas entidades, a informação obtida irá, algumas vezes, ser incorporada no conhecimento matemático do estudante (3'), como por exemplo, um teorema ou uma fórmula. Nalguns casos, a reflexão sobre os métodos usados ou a falta de métodos efectivos podem levar à construção de novos métodos ou ideias matemáticas (4).

De forma geral, pode afirmar-se que um problema é uma situação para a qual um indivíduo está interessado em obter uma solução mas que não dispõe, à partida, de um procedimento de resolução. A resolução de problemas é considerada um processo natural de exploração onde o indivíduo tem que reunir determinadas condições iniciais (conhecimentos e compromisso) que lhe permitam superar as dificuldades que vão surgindo à medida que atinge os objectivos perseguidos, proporcionando uma alteração substancial na situação de partida.

O Quadro 2.1 apresenta, de forma resumida, os aspectos que os vários autores referidos destacam sobre a noção de problema e de resolução de um problema.

Tipos de problemas

Uma grande variedade de problemas pode ser utilizada num programa de ensino que dê ênfase à resolução de problemas, estando a respectiva escolha dependente da perspectiva que se tem relativamente à natureza de um problema de Matemática e à resolução de problemas. Dada a dificuldade de entendimento sobre o que é um problema, alguns autores (por exemplo, Shulman, 1986b) consideram que mais importante do que definir problema é encontrar uma tipologia que ajude a identificar o tipo de problema e de resolução que permite fazer face a determinada situação, uma vez que este aspecto constitui um factor decisivo no ensino da resolução de problemas.

Quadro 2.1
Perspectivas sobre a noção de problema e a sua resolução

AUTOR(ES)	ASPECTOS DESTACADOS
Agre (1982)	O processo de resolução possui certo grau de dificuldade.
Blum & Niss (1991)	Inclui questões abertas; O indivíduo não possui meios suficientes para responder de forma imediata ou directa.
Carl (1989)	Um processo de aplicação de conhecimentos previamente adquiridos a novas situações.
Dumas-Carré et al. (1989)	Uma situação ambígua que levanta algumas dificuldades.
Kantowski (1980)	O indivíduo não tem algoritmo ou procedimento que o conduza a uma solução imediata; O conhecimento deve ser aplicado de forma nova.
Lester (1980)	Uma situação para a qual um indivíduo não dispõe de um método imediato de resolução; O indivíduo tem interesse na procura de uma solução.
Mayer (1985)	A descoberta do caminho que leva de uma situação inicial a outra situação final e que envolve uma série de operações mentais.
Pólya (1980)	Uma situação desconhecida para o indivíduo; Processo para atingir uma resposta à situação problemática.
Ponte (1992)	O indivíduo não dispõe de método imediato de resolução; A necessidade de um indivíduo se empenhar activamente na procura de uma solução.
Schoenfeld (1985a)	Uma questão difícil ou que levanta dúvidas.

Tomando uma perspectiva pedagógica, Pólya (1981, Vol. 2, p. 139) diferencia os problemas entre: (i) os que se resolvem mecanicamente aplicando uma regra que acaba de se conhecer; (ii) os que se podem resolver aplicando algo que se deu antes e em que o resolvedor tem que tomar alguma decisão; (iii) os que requerem combinar duas ou mais regras ou exemplos dados na aula; e (iv) os que também requerem combinar duas ou mais regras, mas que contém ramificações e requerem alto grau de raciocínio pessoal. Para o autor, a ordem determina o grau de dificuldade e o valor educativo. Assim, na sua perspectiva, os problemas com verdadeiro interesse são os dos níveis (iii) e (iv).

No âmbito da Matemática, Borasi (1986) propõe uma outra classificação de problemas a partir da análise de alguns elementos estruturais: a formulação do problema, o contexto do problema, o conjunto de soluções que o problema admite e o método de abordagem que pode ser usado na sua resolução. Baseada nestes elementos, a autora distingue sete tipos de problemas:

(i) O exercício, em que a formulação é única e explícita, em que o contexto é inexistente e em que as estratégias de resolução se resumem à aplicação de regras e algoritmos conhecidos que conduzem à solução que, regra geral, é única;

(ii) O problema de palavras, que representa uma situação em que a formulação é única e explícita, em que também é clara e explícita a presença do contexto do problema, a solução é quase sempre única e exacta e o método de abordagem é uma combinação de algoritmos conhecidos;

(iii) O puzzle, caracterizado por uma formulação e um contexto explícitos, e em que as estratégias de resolução envolvem regra geral a descoberta de um novo algoritmo que conduz à solução que, nestes problemas é, regra geral, única;

(iv) A prova de uma conjectura, em que a formulação é única e explícita e em que a solução não é, geralmente, única; neste tipo de problemas o contexto é parcialmente definido e o método de abordagem passa pela reformulação e elaboração de novos algoritmos;

(v) O problema da vida real, em que a formulação e o contexto não são totalmente explícitos no respectivo enunciado, permitindo diversas alternativas; há muitas soluções possíveis, mas apenas aproximadas, e a resolução deste tipo de problemas envolve a criação de um modelo matemático que traduz a situação apresentada, a aplicação de técnicas matemáticas na exploração do modelo e a tradução dos resultados obtidos para a situação da vida real a fim de confirmar a validade da solução encontrada;

(vi) A situação problemática é uma situação em que há várias soluções possíveis, a formulação é apenas parcialmente dada, o contexto surge de forma implícita e problemática e as estratégias de resolução, além de envolverem a exploração do contexto, implicam a reformulação do problema e a formulação de novos problemas (problem posing); e

(vii) A situação ainda não problemática, é uma situação em que não há qualquer formulação do problema, sendo apenas feito um convite à exploração do contexto. A solução é a criação de um problema e o método de abordagem é a formulação de problemas.

Ponte (1992) refere que a distinção entre problema e exercício é consensualmente aceite, mas não parece ser entendida por todos da mesma maneira. Para alguns esta distinção parece simples e óbvia, enquanto outros sublinham que não há uma linha divisória clara mas antes diversos escalões intermédios, sendo algumas questões difíceis de classificar. Abrantes (1989), que considera existir um contínuo entre exercício e problema, discute o que é (e não é) um (bom) problema e diferencia-os em oito níveis, tendo por base os critérios adoptados por Borasi (1986): Exercícios, problemas de palavras, problemas para criar equações, problemas para demonstrar, enigmas ou problemas para descobrir, problemas da vida real, situações problemáticas e situações. Para este autor, um exercício não está contextualizado, tem uma formulação explícita e fechada, e a sua resolução (por um processo único e de carácter exacto) faz uso de algoritmos previamente conhecidos. Os problemas de palavras e os problemas para criar equações mostram explicitamente o contexto no enunciado; coincidem com os exercícios quanto à formulação, método de resolução e carácter da solução. Os problemas para demonstrar diferem dos anteriores apenas no facto de admitirem mais do que uma formulação. Nos enigmas para descobrir, o contexto aparece totalmente explícito no enunciado mas a sua resolução passa pela existência de actos de *insight*. Um problema da vida real pode ter várias soluções, que podem ser aproximadas, apresenta uma formulação parcial com muitas alternativas possíveis e o contexto figura parcialmente no enunciado, de cuja exploração e modelação depende a solução. Quando um problema admite várias soluções, a sua formulação está só sugerida e portanto admite alternativas de reformulação e o contexto aparece apenas parcialmente no enunciado, estamos perante uma situação problemática. O último nível é mais geral. O contexto aparece parcialmente no enunciado, que inicialmente não representa um problema, a sua formulação é inexistente (inclusivamente de forma implícita) pelo que para ser abordado é necessário que seja convertido em problemático. Neste caso estamos perante uma situação.

Duas outras classificações são igualmente importantes para Ponte (1992). Uma refere-se à distinção entre problema e situação problemática, também designada por investigação ou exploração. Segundo o autor,

> Num problema existe uma formulação mais ou menos explícita do que é dado e do que é pedido. Numa situação problemática existe um grau grande de indefinição acerca de um e outro, pressupondo-se que cabe ao aluno um papel importante na sua precisão. (p. 97)

Outra distinção que este autor considera igualmente pertinente fazer é entre os problemas puramente matemáticos e os da vida real, uma vez que a sua resolução envolve processos de raciocínio bem diferentes. Os problemas da vida real podem ainda ser de diversos tipos, de acordo com a natureza das actividades que proporcionam. Ames (1980), citado em Ponte (1991, 1992), classifica os problemas escolares em três grandes grupos: Os de tipo 1, que são situações do mundo real, relativamente curtas e auto-suficiente em termos de informação, que usualmente põem uma questão que tem solução simples. Estes problemas contêm normalmente informação suficiente para permitir uma resolução matemática e podem ser usados quando os alunos já têm os conhecimentos necessários para os resolver. Os de tipo 2 são situações do mundo real, normalmente susceptíveis de serem exploradas de diversas maneiras. Segundo o autor, a resolução destes problemas tende a ser globalmente dirigida pelo professor, mas há normalmente oportunidades para explicações divergentes. O objectivo não é tanto ver a Matemática como instrumento para produzir respostas a questões específicas mas vê-la sobretudo como um recurso para compreender melhor uma situação real. Finalmente, os problemas de tipo 3 são investigações abertas cuja exploração pode seguir um de muitos caminhos. Atendendo à sua natureza, podem representar actividades e experiências de aprendizagem muito diversas, tendo por isso um forte atractivo pedagógico.

Também Blum e Niss (1991) distinguem os problemas matemáticos em aplicados e puros:

> É característica de um problema matemático aplicado que a situação e as questões que o definem pertençam a algum segmento do mundo real e envolvam alguns conceitos, métodos e resultados matemáticos. Por mundo real entendemos o 'resto do mundo' fora da Matemática, isto é, assuntos escolares ou disciplinas diferentes da Matemática, ou do dia a dia e do mundo à nossa volta. Pelo contrário, com os problemas matemáticos puros a situação definidora está completamente submersa no universo matemático. (pp. 37-38).

A tipologia de problemas apresentada por Ernest (1992) centra-se no papel do professor e do aluno, isto é, na abordagem pedagógica. Na "descoberta guiada", os problemas são apresentados pelo professor e dirigidos para um objectivo ou solução. Neste caso, o papel do aluno é seguir um conjunto de orientações. Na abordagem que designa por "resolução de problemas", o professor coloca o problema e facilita a resolução e o aluno procura a sua própria via de resolução. Por último, tem-se a "formulação de problemas", em que o professor cria um contexto favorável para os alunos formularem os seus próprios problemas.

Pehkonen (1991), pelo seu lado, valoriza a distinção entre os problemas abertos e fechados. Esta distinção opera ao nível da exactidão da descrição do enunciado do problema e objectivos. Assim, num problema fechado, tanto o enunciado como os objectivos são fechados, isto é, é dada uma indicação mais ou menos explícita do que é dado e do que é pedido. Se o enunciado e/ou os objectivos são abertos, então temos o problema designado por aberto, desempenhando o aluno um papel importante na sua definição. Na opinião do autor, os problemas que são usualmente encontrados na Matemática escolar são maioritariamente problemas fechados. Em adição ao conceito de resolução de problemas também surge o termo 'investigação' que forma um subgrupo dos problemas abertos. Por exemplo Evans (1987) explica a diferença entre estes dois conceitos da seguinte forma: a resolução de problemas é uma acção convergente onde os alunos têm que encontrar uma solução para um certo problema. Pelo contrário, a investigação é mais divergente e aqui os alunos são encorajados a pensar em estratégias alternativas, a considerarem o que irá acontecer se um certo caminho for seguido ou verificar quando é que diferentes abordagens irão produzir diferentes resultados. Deve notar-se que a fronteira entre resolução de problemas e investigações não está bem definida. A maior parte dos problemas tornam-se investigações se as condições da tarefa forem mudadas. Em muitas investigações, independetemente do grau de dificuldade inicial, um estádio será atingido onde os alunos formulam uma questão que não sabem como resolver, caso em que têm então um problema.

O ensino da resolução de problemas

A resolução de problemas constitui uma das orientações fundamentais correntemente defendidas para o ensino da Matemática (APM, 1988; MAA, 2004; NCTM, 1991). O NCTM (1991), por exemplo, refere-se à resolução de problemas como sendo "essencial desenvolver em todos os estudantes a capacidade de resolver problemas se se pretende que sejam cidadãos produtivos" (p. 6). Além disso, grande parte dos estudos realizados procuram saber mais acerca das formas como os alunos aprendem a resolver problemas, acerca dos métodos de ensino mais eficazes e, muito especialmente, acerca dos processos que os alunos utilizam quando resolvem problemas. Na literatura, existe um número significativo de resultados sugerindo que há vários aspectos da resolução de problemas que podem e devem ser ensinados (Charles & Lester, 1984; Fernandes, 1992b), o que originou o desenvolvimento de diversas abordagens para ensinar a resolver problemas.

Relativamente à forma como os alunos desenvolvem as suas capacidades na resolução de problemas, têm sido defendidas várias posições, sendo uma das mais frequentes, a do ensino de heurísticas. As heurísticas gerais – termo introduzido por Pólya (1945) para descrever a arte da resolução de problemas – são grandes sugestões ou estratégias, correspondentes a 'operações mentais', que têm potêncial para serem aplicadas a um grande número de estruturas matemáticas. As heurísticas constituem sugestões universais que podem ser consideradas nas actividades de resolução de problemas, geralmente independentes do contexto ou conteúdo matemático e cuja consideração pode ajudar a guiar o trabalho dos estudantes através de um conjunto de problemas difíceis (Mamona-Downs & Downs, 2005).

Segundo Fernandes (1992a), vários investigadores defendem que:

> As heurísticas e os métodos heurísticos estão intrinsecamente associados ao ensino da resolução de problemas porque, entre outras características, parecem motivar os alunos. São relevantes do ponto de vista pedagógico, promovem a aprendizagem activa e podem ajudar a melhorar os processos de ensino e de aprendizagem da resolução de problemas. (p. 47)

O autor acrescenta ainda que a análise dos resultados dos trabalhos de investigação sobre a avaliação dos efeitos de métodos heurísticos de ensino e de heurísticas no desenvolvimento da capacidade de os alunos resolverem problemas permite concluir que:

> As heurísticas, gerais e específicas, podem ser ensinadas e aprendidas e contribuem para melhorar o desempenho dos alunos na resolução de problemas. Mesmo nas investigações quantitativas em que não foram detectadas diferenças estatísticamente significativas, os investigadores reflectem que os estudantes, que foram ensinados a utilizar heurísticas, utilizaram-nas mais frequentemente, resolveram mais problemas correctamente e revelaram comportamentos mais susceptíveis de conduzir ao sucesso em resolução de problemas do que os alunos que não foram ensinados a utilizá-las. (p. 69-70)

Pólya é, porventura, o autor mais conhecido pela sua conceptualização da Matemática como resolução de problemas e pelo seu trabalho em fazer esta actividade o foco do ensino desta disciplina. Para Pólya (1945), o objectivo fundamental da educação é ensinar os mais novos a pensar, constituindo a resolução de problemas uma arte prática que todos os alunos podem aprender. O modelo de resolução de problemas concebido por este matemático representa uma referência para o ensino da resolução de problemas de Matemática. De acordo com este modelo, a resolução de um problema envolve quatro fases: (i) compreender o problema; (ii) idealizar um plano; (iii) executar o plano; e (iv) avaliar o que foi feito (olhar para trás para o trabalho realizado).

Compreender um problema é interpretar a informação fornecida de forma que ela possa fazer sentido para o aluno e envolve o entendimento verbal e a identificação das partes principais do problema: As incógnitas, os dados e as condicionantes. É evidente que a compreensão do problema aumenta à medida que o aluno actua sobre a situação. Estabelecer um plano é formular, pelo menos de uma forma geral, qual o caminho a seguir para obter a solução do problema. Nesta fase é importante conseguir seleccionar ou inventar uma estratégia de resolução do problema. Se tal não levar a nada, o estabelecimento do plano pode ainda ter passar por procurar fazer variações do problema, generalizações, particularizações e pela procura de problemas similares: "As boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos" (Pólya, 1975, p. 6). O plano é apenas um roteiro geral. Executar o plano é efectuar todo o trabalho identificado na fase anterior. É ao longo da sua execução que surge a formulação de conjecturas e o seu teste, seguindo muitas vezes um processo cíclico. O raciocínio plausível é, segundo Pólya (1954), aquele que toma uma expressão muito significativa e particular nesta etapa. Finalmente, a avaliação ou análise retrospectiva do processo de resolução do problema permite identificar até que ponto este está resolvido e se a estratégia seguida foi ou não adequada. Assim, em primeiro lugar, deve testar a solução encontrada e caso esta não verifique o problema, ensaiar uma nova abordagem. Mas mesmo que a solução encontrada seja correcta é sempre possível aumentar a compreensão do problema procurando, por exemplo, generalizações ou verificando se alterações nas condições iniciais do problema afectam a solução.

Existe uma condição adicional a que Pólya faz referência para o sucesso da resolução e que diz respeito ao campo afectivo. Segundo este autor, não basta compreender o problema, é igualmente preciso querer resolvê-lo, isto é, deve haver interesse, curiosidade e sentido de desafio para aquele que empreenda esta tarefa.

O modelo de quatro fases apresentado por Pólya pressupõe o uso de um conjunto associado de estratégias, como sejam "explorar analogias", "pensar num problema relacionado, mais simples", "estabelecer sub-objectivos (podendo passar pela decomposição do problema em sub-problemas)", "olhar para trás", "examinar casos particulares" e "desenhar esquemas". Para o autor, estas estratégias devem ser explicitamente ensinadas e constituem um conjunto de instrumentos que o indivíduo passa a ter ao seu dispor para resolver problemas. O conhecimento de tais estratégias ajudam o indivíduo a tornar-se mais apto a resolver problemas. Apesar de o aluno poder ter muita dificuldade, tanto em seleccionar a heurística mais apropriada como em a aplicar, este modelo tem servido de base à maior parte do trabalho realizado com vista a melhorar as capacidades dos alunos na resolução de problemas, muito em especial dos alunos dos níveis etários mais avançados (Schoenfeld, 1980).

Pelo seu lado, Mason, Burton e Stacey (1982) apresentam um modelo envolvendo três fases, para a resolução de um problema: entrada, ataque e revisão/extensão. A fase de entrada cobre as duas primeiras fases de Pólya enquanto o ataque e revisão correspondem às fases (iii) e (iv) deste autor. Na fase de entrada, o potencial resolvedor do problema familiariza-se com o contexto do problema (ganha um senso do problema) jogando com as ideias, talvez através de especializações simples, movendo-se para uma posição que tem como objectivo a especificação clara do que é conhecido e do que se pretende, e considerando com cuidado o que pode ser introduzido (notação, procedimentos de soluções, etc.). Então, uma mudança qualitativa ocorre com um ataque cometido ao problema usando as ideias que foram introduzidas. Isto pode ser bem sucedido, mas, segundo os autores, mais frequentemente leva a um impasse, a um caminho sem fim, obrigando o indivíduo a rever o que foi feito e regressar à fase de entrada para considerar novo ataque. Uma vez obtida uma solução, o espírito muda outra vez para uma revisão – verificação dos resultados para assegurar que nenhum erro foi feito, revisão do que foi feito para aprender estratégias que podem ser úteis noutras ocasiões e depois estar preparado para alargar o problema a novos níveis de sofisticação, recomeçar o ciclo de entrada a um nível mais sofisticado.

Também Schoenfeld (1985a) considera uma série de heurísticas que, na sua opinião, garantem a possibilidade de resolução de problemas. O ensino da resolução de problemas foi desenvolvido a partir de uma estratégia directora e de um conjunto de heurísticas, sendo constituído por cinco fases: (i) análise; (ii) desenho; (iii) exploração; (iv) realização; e (v) verificação. A fase da análise inicia-se com um problema. O objectivo central consiste em compreender o problema e adquirir consciência da importância de examinar dados, factores desconhecidos, etc. Outro aspecto a considerar pode ser a reformulação do problema sem perda de generalidade. Da análise passa-se à fase do desenho cujo objectivo consiste em manter uma visão geral do processo de resolução de problemas, desenvolver um plano sobre a forma como se vai proceder. Opta-se pela exploração quando o problema apresenta dificuldades e não se dispõe de um plano claro que possa produzir directamente uma resolução. A fase da realização reflete a decisão de que se dispõe de um plano que deveria conduzir a uma resolução, no caso de se levar a cabo. O objectivo da verificação consiste em controlar a resolução.

Embora o ensino da resolução de problemas via heurísticas continue a ser recomendado, a importância que lhe era reservado tem-se alterado de forma a realçar outros aspectos. Assim, Schoenfeld (1985a) procura explicar porque é que esta abordagem não obtém os resultados esperados apresentando alguns obstáculos ao domínio das heurísticas. Por um lado, as heurísticas gerais estão amplamente definidas (não são apresentadas de forma suficientemente detalhada) e portanto não se atende ao facto de incluírem um conjunto de etapas distintas com diferentes níveis de dificuldade. Por outro lado, mesmo dominando por completo toda uma estratégia, incluindo todas as suas diferentes fases de aplicação, o sucesso da utilização da referida estratégia depende igualmente de um extenso repertório de capacidades que se tem de ter para ser capaz de resolver problemas (por exemplo o controlo da decisão sobre qual a heurística mais adequada a uma dada situação particular) e ainda à necessidade de uma boa base de conhecimentos sobre o domínio em presença no problema. Em suma, para este autor, para se aplicar com sucesso uma estratégia não a basta conhecer, é preciso igualmente ser capaz de tomar boas decisões e ter um extensivo repertório de capacidades.

Estas observações sugerem a importância duma base de conhecimentos sólida como pré-requisito para uma boa capacidade de resolução de problemas. Kantowsky (1977), ao estudar o processo de utilização de estratégias heurísticas por parte dos alunos, sublinha que um mínimo de enraízamento em conteúdos pode ser necessário para que as heurísticas tenham onde se apoiar e possam assim ser de alguma utilidade para o processo de resolução do problema. Na mesma linha, Ponte (1992) realça a importância dos requisitos a nível de conteúdos, e sublinha a necessidade da existência de uma boa base de conhecimentos para se desenvolver a capacidade de resolução de problemas.

Constata-se, também, que para ter êxito na resolução de problemas não basta ter muitos conhecimentos matemáticos ou conhecer estratégias de resolução, pois muitos alunos apesar de os possuírem, não têm sucesso quando resolvem problemas. Algumas dificuldades na resolução de problemas estão associadas com as fracas capacidades metacognitivas em geral, ou a falta de processos de controlo, em particular, os quais são considerados essenciais para o sucesso da resolução de problemas (Lester, 1985; Schoenfeld, 1985b, 1992; Silver, 1985; Vale, 1993). Os processos metacognitivos têm a ver com o pensamento acerca do próprio pensamento e podemos identificar duas vertentes. Por um lado, o conhecimento dos conhecimentos, respeitando ao que a pessoa sabe acerca das suas próprias capacidades e recursos, assim como das suas concepções sobre a Matemática. Por outro lado, a gestão ou controlo dos conhecimentos diz respeito à forma como toma decisões para seleccionar e gerir estratégias e acções práticas com vista à resolução de um problema (Fernandes, 1989). Segundo Vale (1993), a questão está no facto de os alunos terem dificuldades em relacionar todos os conhecimentos que possuem e em gerir a sua aplicação na resolução de problemas. Neste sentido, nas investigações realizadas (Lester, 1985; Schoenfeld, 1985b, 1992; Silver, 1985; Vale, 1993) tem sido igualmente referida a metacognição como um aspecto relevante a considerar no ensino de Matemática e na resolução de problemas.

Lester (1985) considera por exemplo que a investigação em metacognição tem claras implicações para a educação matemática pois o seu ensino origina que os alunos discutam e pensem sobre o processo que utilizaram para resolver problemas, tendo em vista fazê-los tomar consciência de que muitos problemas podem ter vários processos de resolução. Também Ponte (1992) considera que estimular no aluno o desenvolvimento das suas capacidades no que respeita aos processos metacognitivos constitui uma possibilidade de melhorar a sua capacidade de resolução de problemas.

Em suma, as dimensões para uma boa prática na actividade de resolução de problemas incluem: (i) o conhecimento matemático; (ii) domínio de estratégias e (iii) controlo sobre o processo de trabalhar um problema.

O papel da resolução de problemas no ensino da Matemática

A literatura sobre a resolução de problemas mostra que os sentidos atribuídos pelos professores a problema e resolução de problemas são diversos, reflectem diferentes visões sobre a Matemática e a sua aprendizagem e influenciam o papel e lugar que cada professor concede à resolução de problemas relativamente ao currículo de Matemática. A este propósito Thompson (1985, 1992) considera que o êxito ou fracasso da introdução da resolução de problemas no currículo depende, sobretudo, da forma como esta ideia é ou não adoptada pelos professores na sua prática pedagógica. Assim, apesar de ser consensual que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas constitui um dos principais objectivos do ensino da Matemática, as múltiplas interpretações que são atribuídas a este conceito tornam este objectivo pouco claro.

Por exemplo, Schoenfeld (1985a, 1992) distingue três visões de resolução de problemas. Na primeira, esta é considerada um meio para facilitar a aquisição de outros objectivos tais como motivação, recreação, e para desenvolver e praticar capacidades matemáticas. Noutra, a resolução de problemas é um objectivo, entre outros, no próprio processo de instrução. É uma capacidade ou peça de conhecimento que vale a pena ensinar por si só. Finalmente, numa terceira visão, quando estão envolvidos problemas desafiadores, a resolução de problemas pode ser vista como uma forma de arte, como o que a Matemática é na sua forma final.

Segundo Boavida (1993), "a compreensão da problemática da resolução de problemas no âmbito da educação matemática poderá ser alargada pela análise dos possíveis papéis que a resolução de problemas poderá desempenhar relativamente ao currículo" (p. 113). Neste sentido a autora agrupa as representações pessoais dos professores relacionadas com a interpretação que concedem à resolução de problemas em torno de três concepções (Boavida, 1994). A primeira é o de "problemas como exercícios". A resolução de problemas é, antes de mais, interpretada como uma actividade de resolução de exercícios que se segue às exposições teóricas apresentadas pelo professor. Desta forma, os problemas/exercícios devem estar necessária e directamente relacionados com os conteúdos matemáticos incluídos no programa escolar do nível de ensino a leccionar e exercem a sua função de ensino ao possibilitar que os alunos treinem regras e procedimentos de cálculo. Na segunda concepção, os problemas são um conteúdo a ser 'somado' ao currículo de Matemática. Neste caso, os problemas constituem tarefas não rotineiras, mais elaboradas que os exercícios e cuja resolução requer a realização de um esforço mental criativo que não se esgota na aplicação directa e imediata de habilidades anteriormente aprendidas. Apesar de estarem incluídos nas actividades de ensino relacionadas com os conteúdos do programa de Matemática, a resolução de problemas é considerada uma actividade pontual, destinada a enriquecer o ensino, podendo constituir um meio de motivação dos alunos. Na terceira concepção, a resolução de problemas surge como via educativa para o ensino e aprendizagem da Matemática. Nesta perspectiva, a actividade de resolução de problemas não se restringe à aplicação directa de assuntos matemáticos anteriormente estudados mas envolve a exploração de questões, a investigação de estratégias de resolução variadas e a comunicação e discussão dessas estratégias. Procura-se que os problemas sejam diversificados, de carácter não rotineiro e visando a aplicação da Matemática a situações do mundo real. A resolução de problemas constitui, assim, um contexto de ensino e aprendizagem, uma capacidade que pode ser desenvolvida e uma arte que deve ser ensinada.

Schroeder e Lester (1990) também apresentam uma caracterização das concepções de ensino da resolução de problemas distinguindo três tipos: (i) o ensino "para" a resolução de problemas que dá importância à aquisição pelo aluno de conceitos e técnicas matemáticas que podem ser úteis na resolução de problemas; (ii) o ensino "acerca" da resolução de problemas, em que são realçados procedimentos e estratégias com o objectivo de modelar comportamentos capazes de ajudar os alunos a tornarem-se melhores resolvedores de problemas; e (ii) o ensino "através" da resolução de problemas, em que todos os conteúdos matemáticos são apresentados no contexto de situações problemáticas. Neste caso, considera-se que os problemas são um meio privilegiado para ensinar e aprender Matemática.

Para estes autores, a resolução de problemas não é um tópico da Matemática, nem deve ser visto como tal. Consideram que existem algumas limitações à adesão isolada a cada uma destas concepções. Se o ensino "acerca" da resolução de problemas é o foco, pode acontecer que esta seja apenas vista como mais um tópico de Matemática a trabalhar isoladamente. A defesa de um ensino "para" a resolução de problemas, pode levar a que os alunos se envolvam na resolução de problemas apenas depois de terem aprendido um determinado conceito ou algoritmo. Muitas vezes, as soluções desses problemas são obtidas pela aplicação directa dos procedimentos exemplificados e, quando os problemas não seguem o exemplo apresentado, os alunos sentem-se perdidos. Na opinião de Schroeder e Lester, esta prática não é resolução de problemas, já que não exige o recurso ao pensamento matemático. Além disso, pode criar nos alunos a ideia de que todo o problema matemático se pode resolver rapidamente, sem muito esforço e sem a necessidade da compreensão de como a Matemática que se aplica se relaciona com situações reais. Finalmente, para Schoeder e Lester, um ensino "através" da resolução de problemas é pouco utilizado, quer pelos professores quer pelos manuais escolares e deve ser considerado, desenvolvido, tentado e avaliado. Trata-se da abordagem mais consistente com as recomendações das normas NCTM (1991), já que aqui o papel mais importante para a resolução de problemas é desenvolver nos alunos a compreensão matemática.

Os vários modos de encarar o ensino da resolução de problemas, condicionam a linha metodológica a seguir na sala de aula. Ponte (1992) analisa a forma de encarar a resolução de problemas ao nível dos currículos e da prática pedagógica dos professores e considera que existem três perspectivas diferentes. Uma primeira perspectiva encara um ensino da Matemática 'enriquecido' com a resolução de problemas. Nesta perspectiva, os problemas são vistos como requerendo conhecimentos de base, conceitos e técnicas, cuja aprendizagem não deve ser descurada. A resolução de problemas é, assim, uma actividade importante que se deve articular com outros conteúdos e actividades que deverão constituir o currículo de Matemática. Uma segunda perspectiva defende a necessidade de partir de problemas de modo que o trabalho matemático surja deles e da experiência com a resolução, como defendido em APM (1988): "O conhecimento matemático deve emergir dos problemas e da experiência com a resolução de problemas" (p. 44). Uma terceira perspectiva, além de proporcionar aos alunos a resolução de vários problemas, considera o seu ensino de uma forma explícita como importante e dá relevo à discussão de heurísticas gerais e específicas, ou ao desenvolvimento nos alunos de capacidades metacognitivas.

Em Stanic e Kilpatrick (1989) podem identificar-se três papéis que a resolução de problemas tem desempenhado no currículo escolar de Matemática: (i) a resolução de problemas como contexto; (ii) a resolução de problemas como capacidade; e (iii) a resolução de problemas como arte. A resolução de problemas como contexto baseia-se na ideia de que os problemas e a sua resolução são meios para atingir outros fins importantes e pode ser subdividida em pelo menos cinco subtemas: A resolução de problemas como justificação, como motivação, como divertimento, como veículo e como prática. Para estes autores, a resolução de problemas como capacidade é encarada como uma finalidade, presente na maioria dos currículos de Matemática. A resolução de problemas como arte, visão defendida por Pólya (1981), contrasta com as duas perspectivas anteriores e voltou a dar importância à arte da descoberta. Segundo Stanick e Kilpatrick (1989), o trabalho de Pólya foi muitas vezes mal interpretado como preconizando um ensino quase algorítmico de heurísticas e técnicas, considerando a resolução de problemas uma actividade bem individualizada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Na realidade, o desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras é claramente desvalorizado por Pólya, para quem o objectivo fundamental da educação é ensinar a pensar, e que defende que ao resolver problemas o aluno está a fazer Matemática.

Charles (1992) caracteriza três tipos de abordagem para o ensino da resolução de problemas: (i) a abordagem isolada (*stand alone*) em que se ensinam aos alunos estratégias e destrezas para resolver problemas, poucos conhecimentos matemáticos são exigidos ao aluno e não se espera, também, que do trabalho surjam novos conceitos; (ii) a abordagem por imersão, baseada no construtivismo, que admite que os alunos, ao explorarem situações matemáticas, contruam mentalmente a sua própria compreensão da Matemática; e (iii) a abordagem *embedded thinking skills*, misto das duas posições extremas anteriores, em que é dada atenção explícita aos processos de pensamento utilizados e ao conteúdo matemático envolvido.

Branca (1980) refere três perspectivas para o ensino da resolução de problemas: (i) como objectivo, apresentando-a como a principal razão para o estudo da Matemática; (ii) como processo, dando importância aos métodos, procedimentos, estratégias e heurísticas utilizados; e (iii) como destreza básica, considerando a especificidade dos conteúdos dos problemas, os tipos de problemas e os métodos de resolução, focando-se na parte essencial da resolução de problemas que todos os alunos devem aprender.

Para Nunokawa (2005), a incorporação de actividades de resolução de problemas na aprendizagem de Matemática dos estudantes deve estar relacionada com o que se pretende obter na sua aprendizagem. Defende que existem quatro propósitos distintos em usar a resolução de problemas como ferramenta pedagógica e distingue-os de acordo com a fase da resolução de problemas que se pretende enfatizar com esta actividade: A gestão dos próprios processos de resolução, a aplicação do conhecimento matemático dos estudantes, novos métodos ou ideias para dar significado à situação problemática ou à compreensão da situação problemática. Os três primeiros estão relacionados de perto com a distinção já referida entre ensinar sobre, para ou através da resolução de problemas. O último tem a ver com a criação de novos métodos ou ideias para melhorar a compreensão geral da situação problemática específica.

Da análise das perspectivas dos vários autores sobre a forma como se encara a actividade de resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, parece ser possível distinguir algumas características comuns resumidas no Quadro 2.2.

Num primeiro grupo, o ensino da resolução de problemas é considerado como tendo um estatuto de individualidade própria relativamente a outros conteúdos do currículo de Matemática. Uma vez que os problemas são importantes por si mesmos, devem ser ensinados de forma explícita. Deste modo, o ensino de heurísticas gerais ou específicas torna-se particularmente importante. Incluem-se neste grupo o ensino "acerca" da resolução de problemas referido por Schroeder e Lester, a resolução de problemas como capacidade identificada por Stanic e Kilpatrick, como objectivo na distinção de Schoenfeld e a terceira perspectiva apontada por Ponte.

Um segundo grupo vê a resolução de problemas como abordagem pedagógica de todo o currículo. O conhecimento matemático surge da experiência com a resolução de problemas, entendida como ferramenta para favorecer o pensamento matemático. Incluídos neste grupo estão o ensino "através" da resolução de problemas definido por Schroeder e Lester, a segunda perspectiva indicada por Ponte e a resolução de problemas como arte identificada por Schoenfeld e Stanick e Kilpatrick.

Num terceiro grupo, a resolução de problemas é vista como uma componente do currículo de Matemática que valoriza alguns dos aspectos que se consideram mais importantes nesta disciplina. Os problemas são entendidos como objectos de inquirição usados para enriquecer o ensino, e não em termos de processos de aprendizagem ou abordagem pedagógica adoptada para a Matemática. Neste grupo podem-se incluir a primeira perspectiva indicada por Ponte, a resolução de problemas como contexto referida por Kilpatrick e Stanic, como meio na visão de Schoenfeld e o ensino "para" a resolução de problemas considerado por Schroeder e Lester.

Quadro 2.2
Perspectivas de diferentes autores sobre a resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática

AUTORES	GRUPO 1 ESTATUTO PRÓPRIO	GRUPO 2 ABORDAGEM PEDAGÓGICA	GRUPO 3 ENRIQUECER O ENSINO
Boavida (1994)	Exercícios	Via educativa	Conteúdo
Branca (1980)	Objectivo	Processo	Destreza básica
Charles (1992)	Abordagem stand alone	Abordagem por imersão	Abordagem embedded thinking skills
Schroeder & Lester (1990)	Ensino acerca	Ensino através	Ensino para
Ponte (1992)	3.ª perspectiva	2.ª perspectiva	1.ª perspectiva
Schoenfeld (1985a)	Capacidade	Arte	Meio
Stanic & Kilpatrick (1989)	Habilidade	Arte	Contexto

Esta discussão sobre o sentido que a resolução de problemas tem na educação matemática, mostra que ela pode, na verdade, ser conduzida segundo diferentes perspectivas e servir diferentes propósitos. Na sala de aula, o professor pode usar os problemas para aplicar conhecimentos previamente adquiridos, para desenvolver o 'potencial heurístico' dos alunos ou como ponto de partida para que estes construam novo conhecimento matemático. O progresso da resolução de problemas como proposta pedagógica passa necessariamente por um entendimento claro sobre as várias acepções de problema e as diversas perspectivas de integração curricular. A grande maioria dos autores referidos sublinha que é necessário, cada vez mais, integrar a resolução de problemas tanto quanto possível no todo curricular da Matemática, de modo a que esta não apareça como um assunto à parte, estudado isoladamente, mas pelo contrário, seja vista como uma forma de adquirir estratégias intelectuais que permitam pensar matematicamente e ajudem a compreender melhor o mundo à nossa volta.

Dos problemas às actividades de investigação

O ensino-aprendizagem da Matemática tem por base as actividades que os alunos desenvolvem e estas, por sua vez, dependem das tarefas que lhes são apresentadas pelo professor. Entre as diversas actividades matemáticas que os alunos podem realizar na sala de aula, a resolução de problemas e as actividades de investigação são as que estão mais próximas (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). Na literatura, existe uma grande diversidade de perspectivas sobre estes dois conceitos, o que traz algumas dificuldades à demarcação entre eles.

A importância da formulação e da resolução de problemas no processo de aprendizagem da Matemática é sublinhada por Pólya (1945, 1981). Embora o conceito de problema e a sua relevância educativa estejam, numa fase inicial, associados às heurísticas que podem ser úteis na procura de uma solução, uma vez o problema formulado e o contexto identificado, Pólya reconhece que as técnicas de resolução de problemas precisam de ser ilustradas pelo professor, discutidas com os alunos e praticadas de uma maneira compreendida e não mecanizada. Além disso, observa que embora os problemas rotineiros possam ser usados para cumprir certas funções pedagógicas do ensino dos alunos, para seguir um procedimento específico ou usar uma definição correctamente, só através de um uso criterioso de problemas não rotineiros é que os alunos podem desenvolver a sua capacidade de resolver problemas.

Na perspectiva de Pólya, o aluno aprende Matemática se for desafiado com problemas apropriados, com questões mais abertas, que designa por "problemas de investigação". Segundo o autor, estes problemas são caracterizados por: (i) terem um bom *background* e sugerirem outros problemas desafiantes; e (ii) colocarem a observação, conjecturas, argumentos indutivos, em suma, o 'raciocínio plausível' num papel proeminente. Além disso, para o autor, o aluno poder formular, ou participar na formulação de problemas.

A partir da década de 80, vários documentos começam a defender a resolução de problemas, em diversos níveis de ensino, como uma linha fundamental no ensino da Matemática (AMATYC, 2006; APM, 1988; MAA, 2004; NCTM, 1985, 1991). Autores como Kantowski (1977) e Schoenfeld (1980) perspectivam um ensino através da resolução de problemas, retomando o modelo proposto por Pólya (1945) e contrariando a visão de que basta dominar algoritmos, técnicas e conhecimentos factuais para mais tarde resolver problemas. No mesmo sentido se pronuncia a APM (1996): "Para que um problema tenha valor educativo, é importante que a actividade do aluno se não reduza a encontrar a sua solução" (p. 56). Tanto para o NCTM (1985) como a APM (1988), o conhecimento matemático deve emergir dos problemas e da experiência com a resolução de problemas, experiência essa que engloba processos como a exploração do contexto, a formulação de conjecturas, a discussão e a comunicação, a elaboração de novos algoritmos, o desenvolvimento de modelos matemáticos ou a própria formulação de problemas. Desta forma, a noção de problema torna-se mais rica, assumindo que a resolução de problemas requer muitas vezes a exploração do contexto para além do que surge no enunciado, a criação de formulações alternativas ou a interpretação e clarificação do enunciado fornecido (Abrantes, Leal & Ponte, 1996). Emerge deste modo, a noção de 'situação problemática', associada a actividades como a exploração dos contextos e formulação de problemas.

Mais recentemente, o NCTM (2000) continua a privilegiar a resolução de problemas:

> Aprendendo resolução de problemas em Matemática, os alunos adquirem modos de pensar, hábitos de persistência e de curiosidade, e confiança em situações que não lhes são familiares e que lhes servirão fora da aula de matemática. Ser um bom resolvedor de problemas pode acarretar-lhes grandes vantagens quer na vida de todos os dias quer no trabalho. (p. 52)

Este documento inclui para todos os anos de escolaridade a norma da "argumentação e prova". Esta norma define objectivos escolares que enquadram as investigações matemáticas como experiências de aprendizagem a incluir no currículo desde o pré-escolar. Refere que a escola deve habilitar os alunos a "reconhecer a argumentação e a prova como aspectos fundamentais da Matemática: Formular e investigar conjecturas matemáticas; desenvolver e avaliar argumentos matemáticos e provas; seleccionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de prova" (p. 56). Os exemplos apresentados apontam para aspectos que vão para além da resolução de problemas, e que se prendem com o processo investigativo no contexto de sala de aula.

O conceito de investigação matemática está naturalmente associado à actividade que os matemáticos profissionais desenvolvem na produção de conhecimento e que consiste em descobrir relações entre objectos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, formular conjecturas sobre as respectivas propriedades, procurar argumentos que demonstrem essas conjecturas e levantar novas questões para futura investigação. Este modo de olhar a Matemática, através da forma de gerar conhecimento e não como um corpo de conhecimentos, surge em vários autores como Pólya (1945), Poincaré (1996) e, mais recentemente, Braumann (2002). Neste sentido, investigações matemáticas referem-se a um tipo de actividade a que se associam algumas características inerentes ao processo de criação matemática, tais como: Descoberta, exploração, pesquisa, autonomia, tomada de decisões e espírito crítico.

Em contextos de ensino-aprendizagem, o conceito de investigação matemática traduz uma actividade em que o aluno é chamado a experimentar, de acordo com o grau de ensino em que se encontra, um trabalho com características semelhantes ao realizado pelos matemáticos profissionais. As actividades de investigação, para os alunos, constituem um modo de contactar de perto com a Matemática enquanto actividade e os processos de desenvolvimento desta ciência:

> Entendemos que a maior parte dos tipos de investigação desenvolvidos pelos matemáticos têm equivalentes elementares que podem e devem ser propostos como tarefas aos alunos, de modo que eles experimentem um leque alargado de ideias e processos matemáticos. (Silva, Veloso, Porfírio & Abrantes, 1999, p. 83).

A actividade matemática dos alunos pode consistir em procurar regularidades, formular questões para as quais não têm resposta pronta, testar as primeiras conjecturas, estabelecer argumentos plausíveis e provas formais para validar (ou não) essas conjecturas e generalizá-las, se for caso disso, ou voltar a formular novas questões. A actividade investigativa, entendida desta forma, proporciona aos alunos um contacto com uma parte essencial da Matemática, fundamental para aproximar o 'aprender Matemática' do 'fazer Matemática'.

> O conceito de investigação matemática, como actividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da actividade matemática genuína (...). O aluno é chamado a agir como um matemático (...). (Ponte, Brocado & Oliveira, 2003, p. 23)

Esta ideia de que aprender Matemática é fazer Matemática é uma perspectiva que encontra eco em muitos autores (Hadamard, 1945; Oliveira, Segurado & Ponte, 1998; Pólya, 2002; Porfírio & Oliveira, 1999; Silva et al., 1999) e é defendida em documentos programáticos como o NCTM (1991). Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas (1998) argumentam que as investigações matemáticas, sendo uma parte essencial da actividade do investigador matemático, proporcionam ao aluno uma visão mais completa da Matemática. Assumindo uma perspectiva idêntica, Braumann (2002) refere que

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (...). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática (...). Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. (p. 5).

Tendo em vista clarificar o conceito de investigação matemática, vários autores recorrem à análise das diferenças e semelhanças entre os conceitos de resolução de problemas e de investigações matemáticas. Para Serrazina, Vale, Fonseca e Pimentel (2002), entre estes conceitos existem mais pontos comuns do que diferenças uma vez que ambos se referem a actividades que envolvem processos complexos de pensamento. Acrescentam ainda que, mais do que distinguir um problema de uma investigação, o importante é apresentar aos alunos um conjunto de propostas de trabalho interessantes, que envolvam conceitos matemáticos fundamentais e onde os alunos tenham oportunidade para experimentar, discutir, formular, conjecturar, generalizar, provar, comunicar as suas ideias e tomar decisões.

Abrantes (1994) defende que tanto a resolução de problemas como as investigações apelam à imaginação e à criatividade, requerendo capacidades que se situam muito para além do cálculo e da memorização de definições e procedimentos. Estas capacidades, frequentemente designadas de ‘ordem superior’, surgem associadas à comunicação, ao espírito crítico, à modelação, à análise de dados, às demonstrações e a outros processos de natureza metacognitiva. A mesma ideia é assumida por Ponte e Matos (1996) quando afirmam que, à semelhança do que acontece com as actividades de resolução de problemas, as investigações matemáticas implicam processos complexos de pensamento e requerem o envolvimento e a criatividade dos alunos.

Apesar dos aspectos comuns apontados, existem distinções que são salientadas por diversos autores para destacarem as investigações matemáticas da resolução de problemas. Entre estes aspectos distintivos surgem os objectivos, os papéis do professor e do aluno e os processos matemáticos que estão envolvidos em cada uma dessas actividades. Assim, por exemplo, Ernest (1996) considera que um primeiro aspecto distintivo é a formulação de problemas. De facto, na resolução de problemas, as questões tendem a estar formuladas à partida, enquanto nas investigações esse será o primeiro passo a desenvolver. A este propósito, Silver (1996) caracteriza a formulação de problemas como uma actividade de ensino de cunho investigativo e, mais recentemente, Ponte e Serrazina (2000) salientam a importância da formulação de problemas por parte dos alunos, considerando-a como uma componente de grande importância que marca o início de uma investigação pelos alunos. Finalmente, para Ponte, Brocado e Oliveira (2003), as actividades de investigação e os problemas contrastam pelos seus enunciados. Enquanto num problema o enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido, a formulação de problemas, a colocação de questões e o estabelecimento de objectivos por parte dos alunos são os atributos essenciais das investigações.

Uma outra distinção entre resolução de problemas e actividade de investigação relaciona-se com os seus objectivos: Num problema procura-se atingir algo que não é imediatamente acessível, procura-se a solução, e nas investigações o objectivo é a própria exploração. Deste modo, a exploração de uma investigação é um processo divergente e a resolução de problemas um processo convergente. Para Ernest (1996), embora os conceitos de problema e investigação estejam ambos relacionados com a inquirição, entendida como um processo ou atitude matemática de questionar, o processo investigativo tem um carácter mais divergente do que, em geral, a resolução de problemas. Na sua perspectiva, as investigações matemáticas caracterizam-se, sobretudo, por serem abertas, permitindo que o aluno estabeleça o caminho a seguir e coloque as suas próprias questões e pelo estímulo que fornecem ao aluno no sentido de este justificar e provar as suas afirmações, e de explicitar matematicamente as suas argumentações perante os colegas e o professor. Numa investigação não há resultados conhecidos para os alunos e não se pretende que os alunos encontrem 'respostas certas' mas que explorem as possibilidades, formulem conjecturas e se convençam a si próprios e aos outros das suas descobertas (Pirie, 1987).

Além disso, ao contrário da resolução de um problema, em que podem ser sugeridas e seguidas heurísticas, como as apresentadas por Pólya (1975), nas investigações é muito difícil apresentar um conjunto de estratégias a seguir pois as possibilidades são imensas (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998). O que torna uma actividade de investigação motivadora e desafiante para o aluno é o facto do processo de resolução e a solução ou soluções de uma questão não serem imediatamente acessíveis. Esta ideia é também defendida por Morgan (1997). Para esta autora, uma investigação é fazer 'verdadeira Matemática' e não praticar ou reproduzir técnicas já estabelecidas, permitindo ao aluno um trabalho exploratório, aberto, criativo e independente.

Um outro modo de diferenciar os problemas e as actividades de investigação matemática é distinguir os papéis do professor e do aluno. Numa abordagem de resolução de problemas, cabe ao professor colocar o problema enquanto o aluno tem a tarefa de encontrar um caminho que o conduza à solução. O aluno pode ter alguma iniciativa mas o professor, de um modo geral, controla tanto o conteúdo como o modo de ensinar. Em contraste, numa perspectiva de investigação, o professor poderá escolher a situação de partida mas é o aluno que, em princípio, formula as questões sobre a situação proposta definindo, assim, os seus próprios problemas dentro dela. É uma abordagem pedagógica centrada naquele que aprende em que a actividade é conduzida por este. Desta forma, as relações ao nível da aula de Matemática podem alterar-se (Santos, Brocardo, Pires & Rosendo, 2002).

Quadro 2.3
Comparação de métodos baseados na inquirição para o ensino da Matemática (adaptado de Ernest, 1996, p. 32)

MÉTODO	PAPEL DO PROFESSOR	PAPEL DO ALUNO
Resolução de Problemas	Formula o problema. Deixa o método de solução em aberto.	Encontra o seu próprio caminho para resolver o problema.
Investigação matemática	Escolhe uma situação de partida (ou aprova a escolha do aluno).	Define os seus próprios problemas dentro da situação. Tenta resolver pelo seu próprio caminho.

Ernest (1996) ilustra no Quadro 2.3 os papéis do professor e do aluno, quando se compara estas duas abordagens de ensino, ligadas à inquirição, no ensino da Matemática.

Pela sua natureza, a realização de actividades de investigação na sala de aula, é uma perspectiva curricular inovadora pelo que requer adaptações pedagógicas e impõe novas exigências e responsabilidades ao professor. O facto das actividades de investigação tenderem a ser abertas, requer que o professor tenha conhecimentos matemáticos sólidos para planear e desenvolver tarefas com situações possíveis de serem investigadas pelos alunos e capazes de proporcionar diferentes níveis de aprofundamento (Goldenberg, 1999). A construção destas tarefas é uma função complexa que envolve aspectos tão diversos como os conhecimentos, potencialidades e interesses dos alunos. O professor deve também ter uma grande flexibilidade, tanto para recorrer a estratégias diversificadas de resolução das tarefas, como para lidar com situações inesperadas que necessariamente surgem (Brunheira, 2000).

Um outro desafio colocado ao professor é a integração das tarefas de investigação no currículo de Matemática. A integração das investigações nas aulas é justificada, dependendo dos autores, pela natureza da Matemática, pela motivação criada nos alunos e por facilitar a aprendizagem. A valorização de um ou outro aspecto, pode dar lugar a diferentes abordagens curriculares e formas de trabalho na sala de aula.

Finalmente, também a identificação dos processos matemáticos envolvidos na exploração de uma investigação pode contribuir para clarificar o conceito de investigação matemática e ajudar a perceber as características da actividade que se pretende que os alunos desenvolvam ao investigar (Santos et al., 2002). Ponte e Matos (1996) salientam algumas características da actividade de exploração: A definição do objectivo, a idealização e realização de experiências iniciais, a formulação e teste de conjecturas. Segundo Ponte et al. (1998), depois da idealização e da realização de experiências iniciais é necessário começar por colocar questões produtivas e formular e testar as primeiras conjecturas. Este processo pode mostrar a necessidade de recolher mais dados, de abandonar as conjecturas formuladas inicialmente e de formular novas conjecturas. Torna-se então importante procurar estabelecer argumentos plausíveis e provas formais de modo a rejeitar ou validar as conjecturas resultantes do processo anterior. É ainda de notar que uma outra característica deste processo resulta de poderem, ao longo dele, emergir novas questões para investigar. Também Brocardo (2001) salienta que a actividade de investigação é caracterizada por vários processos matemáticos que não podem ser apenas seguidos de uma forma linear e ordenada. A recolha e organização dos dados, a formulação e teste de conjecturas, a prova, são fases do processo investigativo que devem ser percorridos tanto num sentido como noutro, sendo fundamental analisar as interacções entre eles. A expressão "não linearidade" é usada por esta autora para resumir esta característica da actividade de investigação.

A discussão anterior sugere que as noções de problema e de investigação são muito próximas, pois ambas se referem a processos matemáticos complexos e envolvem actividade fortemente problemática. Existem, no entanto, alguns aspectos que permitem distingui-los. Uma das principais características de um problema é ter um objectivo bem definido, especificado pelo professor, mas que não é rapidamente alcançável. Desta forma, o processo de resolução de problemas é visto como uma actividade convergente, em que se tenta conseguir uma solução para um determinado problema, recorrendo a técnicas e estratégias adequadas. A investigação é vista como uma actividade mais divergente pois a ênfase está em explorar uma questão da matemática, a procurar estratégias alternativas, a considerar o que sucederia se se alterassem certas condições ou a generalizar o problema. Os problemas podem ser mais estruturados ou mais abertos e referir-se a situações puramente matemáticas ou contextos de vida real, no entanto, geralmente, as questões estão claramente estruturadas desde o início e são apresentadas já formuladas aos alunos. Nas investigações, a formulação de problemas, a colocação de questões e o estabelecimento de objectivos por parte dos alunos são aspectos essenciais.

Resolução de problemas e actividades de investigação no ensino superior

Nas últimas décadas, a resolução de problemas tem sido muito trabalhada em investigação educacional. A investigação realizada tem permitido aprofundar o conhecimento e desenvolver a compreensão sobre a resolução de problemas e os assuntos pedagógicos relacionados. No entanto, tem-se verificado uma mudança na natureza da investigação neste domínio (Weber, 2005). Assim, a investigação sobre a resolução de problemas começa por ser realizada com o propósito de compreender a sua natureza e criar unidades de ensino para desenvolver o conhecimento dos alunos e heurísticas para que estes possam resolver problemas de forma mais efectiva (Schoenfeld, 1992). Mais recentemente, torna-se comum uma visão da resolução de problemas como um meio para alcançar outros objectivos pedagógicos (Stacey, 2005). Para Schroeder e Lester (1990), as situações de resolução de problemas podem ser usadas como ferramentas pedagógicas importantes para ajudar os estudantes a construírem conhecimento matemático sofisticado. Maher (2002) acrescenta, ainda, que em determinadas circunstâncias, a resolução de problemas pode até fomentar o desenvolvimento de conhecimento matemático profundo, representações úteis para o raciocínio sobre conceitos matemáticos complexos e heurísticas poderosas de resolução de problemas.

Cai, Mamona-Downs e Weber (2005) fazem o ponto de situação dos trabalhos de investigação realizados nesta área, em vários níveis educacionais e examinam como é que os educadores matemáticos estão actualmente a olhar para a resolução de problemas e quais os aspectos que necessitam de mais investigação. A partir da análise realizada consideram ser possível organizar os resultados da investigação de acordo com os seus objectivos: (i) examinar a compreensão de processos cognitivos complexos envolvidos na resolução de problemas; (ii) explorar os actuais mecanismos pelos quais os estudantes aprendem e dão significado à Matemática através da resolução de problemas e como isto pode ser suportado pelos professores; e (iii) identificar futuras direcções na investigação sobre resolução de problemas. Algumas destas investigações realizadas (Cifarelli & Cai, 2005; Francisco & Maher, 2005; Maher, 2005; Nunokawa, 2005; Weber, 2005) são no domínio da Matemática avançada e dizem respeito à resolução de problemas no ensino superior.

O trabalho de Francisco e Maher (2005) pretende ser um contributo para compreender como promover o raciocínio matemático e como a resolução de problemas e pensamento matemático se ajustam. A Matemática é frequentemente construída como um sistema de relações complexas envolvendo conceitos matemáticos. Raciocínio matemático é também associado com a habilidade de discernir e articular tais relações. Este estudo sugere que estas não são as únicas fontes de promoção do raciocínio matemático. Os conceitos matemáticos básicos podem também ser cognitivamente desafiantes e promover formas complexas de raciocínio. Os autores reconhecem o poder da construção, pelos estudantes, do seu próprio conhecimento pessoal sob condições de investigação que enfatizam uma intervenção mínima na sua actividade matemática e um convite para explorar padrões, fazer conjecturas, testar hipóteses, reflectir nas extensões e aplicações dos conceitos aprendidos, explicar e justificar o seu raciocínio e trabalhar colaborativamente. Desta forma, a aprendizagem da Matemática e o raciocínio são vistos como partes integrantes do processo de resolução de problemas, pelo que os resultados podem também ser compreendidos como condições para promover a aprendizagem significativa da Matemática.

A justificação de ideias e o trabalho de grupo são igualmente salientados por Francisco e Maher (2005) como condições de promoção do raciocínio. Os autores propõem uma distinção entre justificação e prova. Assim, justificação refere-se à forma dos estudantes explicarem as suas acções e decisões matemáticas. Prova é o argumento formal e rigoroso que ajuda os matemáticos a explicar as suas ideias. O estudo realça a importância de enfatizar a justificação sobre provas rigorosas como forma de promover o raciocínio matemático dos alunos. Isto é consistente com a afirmação de Hanna (1990) que as provas "explanatórias" são necessárias para alcançar a construção de compreensão matemática com significado.

A importância destas condições na promoção do raciocínio matemático e da aprendizagem são também referidas por outros autores. Por exemplo, o contexto é também um factor considerado por Upton (2006) ao analisar como é que os estudantes compreendem os conceitos enquanto resolvem problemas complexos em contextos matemáticos (ou seja, expressos em termos puramente matemáticos) e não matemáticos (isto é, enquadrados em aplicações ao mundo real). Os resultados mostram que os estudantes têm desempenhos significativamente melhores nos problemas complexos em contextos não matemáticos e que na resolução destes últimos mostram preferência pelos métodos algébricos em vez dos geométricos, mesmo que a abordagem geométrica seja o método mais eficiente de obter uma solução.

Também Gigger e Walter (2006) analisam as decisões, escolhas e raciocínios feitos por um grupo de estudantes ao abordarem problemas de Matemática em contextos ricos e pobres. Segundo os autores, quando os estudantes abordam um problema de Matemática, qualquer que seja o contexto, baseiam-se na sua experiência passada e em intuições com o objectivo de construir significado da situação problemática e que pode ajudá-los a resolver o problema. Estas experiências passadas e intuições podem formar aquilo a que chamam "contexto para o problema".

A análise do trabalho dos estudantes nestes dois contextos mostra que eles fazem uso de várias representações, a partir das quais são capazes de construir e pensar estruturas de problemas distintos. Embora a estrutura das suas representações seja muito semelhante em ambos os casos, o propósito dos estudantes na construção dessas estruturas é muito diferente. No contexto rico, as condições do problema e a questão a ser respondida é vista muito claramente. As intuições dos estudantes baseadas em experiências significativas, permite focarem-se em como é que podem trabalhar no sentido de uma solução.

Desta forma, o seu trabalho é principalmente focado no desenvolvimento de estruturas para apresentar as condições do problema e tem em conta o significado familiar dos seus termos. De forma contrastante, no contexto pobre, os propósitos dos alunos são guiados para clarificar as condições do problema. Uma vez que não estavam familiarizados com este contexto, o seu trabalho é sobretudo focado na necessidade de construção de um contexto no qual as condições do problema possam ter significado.

A relação entre resolução de problemas e aprendizagem é igualmente abordada em Weber (2005). O autor descreve os diferentes tipos de raciocínio e processos de resolução de problemas usados pelos alunos na construção de uma prova e a relação entre esses raciocínios e o que têm oportunidade de aprender durante essa experiência.

Um problema matemático é uma tarefa na qual não está claro para os indivíduos quais as acções matemáticas que devem ser aplicadas, quer por causa da situação não trazer imediatamente à mente as acções apropriadas requeridas para completar a tarefa ou porque existem várias acções matemáticas plausíveis que o indivíduo considera poderem ser úteis. Weber (2005) defende que a actividade de construção de uma prova pode ser vista como uma tarefa de resolução de problemas na qual o estudante é solicitado a construir um argumento válido e lógico demonstrando que uma determinada afirmação deve ser verdadeira. A construção de uma prova é uma tarefa na qual o estudante é disponibilizado com alguma informação inicial (por exemplo, pressupostos, axiomas, definições) e é solicitado a aplicar regras de inferência (por exemplo, recordar factos previamente estabelecidos, aplicar teoremas) até que uma conclusão desejável seja deduzida. Como na maior parte das tarefas de resolução de problemas, não existe um caminho 'certo' para completar a tarefa da construção de prova. Existem várias inferências válidas que podem ser desenhadas, mas apenas um número pequeno dessas inferências são úteis na construção de uma prova (Weber, 2001).

Investigação recente demonstra que um indivíduo pode construir provas com sucesso numa variedade de caminhos qualitativamente diferentes (Pinto & Tall, 1999; Raman, 2003; Weber & Alcock, 2004). O argumento central apresentado por Weber é que o que se aprende de uma actividade de prova não depende apenas do teorema que se está a provar ou a prova que produz. A abordagem que o indivíduo utiliza para construir a prova influencia as oportunidades de aprendizagem que são permitidas pela produção da mesma. Os resultados sugerem que cada estudante tem oportunidades de aprendizagem muito diferentes e pode construir compreensões qualitativamente diferentes da Matemática que está a estudar, consoante o tipo de prova produzida (prova procedimental, prova sintáctica ou prova semântica).

Ao tentar compreender as características e as principais dificuldades dos alunos universitários na resolução de tarefas matemáticas, Lithner (2000a) realiza um estudo cujos resultados apontam para o que parece ser uma característica comum: Os estudantes focam-se mais no que é familiar e no que se lembram do que no raciocínio matemático (mesmo que elementar) e na exactidão. Os resultados indicam também que esse foco no que é familiar e no que se lembram num nível superficial é dominante sobre o raciocínio baseado em propriedades matemáticas das componentes envolvidas, mesmo quando estas podem conduzir a consideráveis progressos (Lithner, 2000b).

Embora a apresentação de problemas interessantes aos estudantes possa contribuir, positivamente, para o seu crescimento matemático, isto nem sempre ocorre. Quando se analisa o que um indivíduo aprende de um episódio de resolução de problemas, não é suficiente considerar apenas o problema que o indivíduo tenta resolver e a solução que obtem. Também é preciso ter em conta os processos usados pelo indivíduo para a obtenção da solução (Lithner, 2003; Nunokawa, 2005). Se os estudantes usam uma estratégia superficial para resolver um problema, tal como copiar a solução de um problema similar de um livro de texto e mudar algumas variáveis, então a aprendizagem obtida deste episódio é provável que seja limitada. Por outro lado, se o estudante usa o raciocínio plausível para basear raciocínios nas propriedades intrínsecas de conceitos matemáticos relevantes, então pode ocorrer uma aprendizagem substancial (Lithner, 2003).

Cifarelli e Cai (2005) conduzem um estudo onde ilustram e explicam várias características das explorações matemáticas em situações de problemas abertos. Este estudo continua o esforço para aprofundar a compreensão dos complexos processos implícitos na resolução de problemas, analisando o comportamento de estudantes universitários enquanto trabalham em tarefas de resolução de problemas abertos. Nestas situações, alguns aspectos da tarefa não são especificados e requerem que o aluno reformule o problema de forma a desenvolver a sua actividade na procura de uma solução.

Num estudo prévio, os autores identificam diferentes níveis de estratégias de raciocínio, colocação de hipóteses e obtenção de dados, que os estudantes parecem incorporar no desenvolvimento da sua actividade de resolução de problemas. Neste trabalho, os autores desenvolvem um modelo geral dos processos de exploração dos alunos baseados na análise detalhada das acções dos alunos a resolver tais problemas, incluindo as suas interpretações iniciais e significado dado à situação problemática, a forma como o estudante começa a organizar ou estruturar as suas acções de forma a desenvolver objectivos de acção apropriados.

Os resultados mostram que a exploração matemática envolve variados graus de significação (*sense-making*), colocação de problemas e resolução de problemas. Acreditam que a exploração matemática realizada pelos estudantes é um processo recursivo e cíclico, envolvendo sucessivas transições entre a formulação e resolução de problemas, onde a reflexão dos estudantes sobre os resultados da actividade origina oportunidades para formular novos problemas para explorar e resolver.

Na resolução de problemas o papel dos exemplos é considerado crucial. Por um lado, porque permite realizar exploração e chegar à generalização e abstracção (Pólya, 1945), por outro, a verificação de exemplos pode também ser considerada uma forma de provar (Balacheff, 1987). Há, no entanto, alguns estudos que mostram que os exemplos podem fazer os estudantes manterem-se fiéis à fase explorativa sem sentirem a necessidade de generalização (Furinghetti & Paola, 1997; Morselli, 2006). Apesar disso, pouca atenção tem sido dada à actividade de geração de exemplos como um caso especial da resolução de problemas (Zaslavsky & Peled, 1996).

A geração de exemplos é uma espécie de problema aberto, no qual os estudantes têm que explorar a situação de forma a encontrarem o exemplo pedido (Antonini, 2006). Quando não são bem sucedidos nessa tarefa, têm que compreender porque é que não o encontram, se isso depende da sua falta de habilidade ou da natureza da tarefa, isto é, que não é possível gerar o exemplo. Neste último caso, é necessário provar essa impossibilidade. Nesta perspectiva, Antonini, Furinghetti, Morselli e Tosetto (2007) analisam como é que os estudantes se comportam quando solicitados a gerar exemplos na área da Análise Matemática, dando especial atenção a algumas características do processo de resolução de problemas que são mais específicas do PMA.

Bills, Mason, Watson e Zaslavsky (2006) mostram que a geração de exemplos está ligada a actividades como a visualização, exploração e o uso de linguagem informal. Tomando também como ponto de referência a dualidade entre conceito imagem e conceito definição (Tall & Vinner, 1981), Antonini et al. (2007) analisam o papel da visualização e a dualidade entre estratégias analíticas e visuais. Os resultados sugerem implicações didácticas relacionadas com o papel das definições. Segundo os autores, as definições têm que ser o fim de um caminho de apropriação de significado e conhecimento. Sem isso, as definições não têm futuro e não são uma ferramenta para desenvolver actividades matemáticas. A geração de exemplos revela ser uma boa forma de recuperar o significado de definição através da sua aplicação e para tentar atingir a passagem para o pensamento teórico.

As representações mentais têm sido usadas para descrever processos de resolução de problemas em Matemática. Em particular, a construção da representação de um problema tem tido um papel central na descrição do conhecimento que os estudantes trazem para as situações de resolução de problemas matemáticos (Mayer, 1985). Na opinião de Cifarelli (1993), o sucesso dos estudantes na resolução de problemas pode ser devido, em larga medida, à sua habilidade para construir representações apropriadas do problema, usadas como ajuda na compreensão da informação e das relações da situação problemática a resolver.

É neste sentido, considerando que é necessária uma explicação mais precisa para clarificar como é que as representações são construídas e/ou modificadas no decurso de uma actividade de resolução de problemas que Cifarelli (1993) adopta para o seu estudo uma abordagem construtivista. Esta visão inclui um foco tanto nas formas dos estudantes activamente organizarem ou estruturarem as suas experiências anteriores como no conhecimento conceptual que resulta da estruturação da sua actividade. O autor considera ainda que as representações são organizações estruturadas de acções, construídas pelos estudantes em situações de resolução de problemas, e servem como ferramenta interpretativa da compreensão para ajudar a sua actividade de resolução.

O estudo foca-se na actividade cognitiva do estudante com particular ênfase nos processos por ele usados para construir ou modificar representações do problema quando comprometido na resolução de problemas matemáticos. A análise da actividade dos estudantes indica uma construção gradual do seu conhecimento conceptual durante a resolução das tarefas propostas. Este desenvolvimento de conhecimento conceptual é indicado pelas mudanças nas antecipações e reflexões dos alunos. Em particular, os estudantes demonstram conhecimento conceptual quando, ao interpretarem a tarefa, podem reflectir na sua potencial actividade de resolução (e gerar antecipações sobre os seu resultados) sem a necessidade de realizarem acções particulares. As estruturas conceptuais desenvolvidas pelos estudantes são organizadas com propósito, partindo das suas experiências anteriores e subsequentemente servirem para organizar experiências futuras em formas compatíveis com os objectivos.

Resumindo, apesar dos diversos sentidos atribuídos a problema e a resolução de problemas, a sua importância no processo de ensino-aprendizagem da Matemática parece ser concensual. De facto, a maioria dos autores sublinham a necessidade de integrar a resolução de problemas no todo curricular e defendem que as situações de resolução de problemas podem ser usadas como ferramentas pedagógicas importantes para ajudar os alunos a construir conhecimento matemático. Além disso, as noções de problema e de investigação são muito próximas e diversos autores reconhecem o poder da construção, pelos alunos, do seu próprio conhecimento, sob condições de investigação que enfatizam a exploração de padrões, a formulação de problemas e conjecturas, o teste de hipóteses e a explicação e justificação dos seus raciocínios.

2.3. Representações Matemáticas

A consciência da necessidade e importância das representações no ensino e na aprendizagem da Matemática, nos vários níveis de ensino, tem vindo a crescer nas últimas décadas. Esta importância é salientada em documentos curriculares, como por exemplo, o NCTM (2000), que refere que a aprendizagem das representações matemáticas deve fornecer aos alunos a "oportunidade para compreender o poder e a beleza da Matemática e equipá-los para usar representações nas suas vidas pessoais" (p. 364). Vergnaud (1998) também realça a necessidade do estudo das representações e aponta duas razões para esse facto:

> A primeira é que todos experimentamos representações como imagens internas, gestos e palavras. A segunda é que as palavras e símbolos que usamos para comunicar uns com os outros não se referem directamente à realidade mas a entidades representadas: objectos, propriedades, relações, processos, acções e constructos acerca das quais não existe acordo automático entre duas pessoas. (p. 167)

Greeno e Hall (1997) também sublinham a importância das representações, que referem como "ferramentas essenciais para a comunicação e o raciocínio sobre conceitos e informação em Matemática, Ciência e outros domínios" (p. 362). Como nota Goldin (2002), as representações dos alunos podem desempenhar, ainda, um outro papel importante na aprendizagem da Matemática: "O seu estudo permite, pelo menos potencialmente, descrever com algum detalhe, o desenvolvimento matemático dos alunos em interacção com os ambientes escolares e a criação de métodos de ensino capazes de desenvolver poder matemático" (p. 198).

Conceito de representação

Vários autores têm tentado caracterizar aquilo que consideram ser representações. No entanto, como afirma Vergnaud (1998, p. 167), "representação é um conceito difícil" porque a noção de representação no âmbito do ensino, aprendizagem e desenvolvimento da Matemática, pode ter diferentes interpretações (Goldin, 2002). Assim, por exemplo, Cifarelli (1998) usa a palavra 'representação' exclusivamente para designar uma representação mental, enquanto Even (1998) ou Presmeg e Nenduradu (2005) usam a palavra para dar significado a uma representação material ou externa. A análise de Vergnaud (1998) torna esta distinção interna/externa ainda mais complexa ao dar atenção, também, às acções a partir das quais as estruturas mentais são constituídas:

> Este aspecto [o papel da acção na representação] é importante para a educação matemática e até para a epistemologia da Matemática, uma vez que os conceitos matemáticos têm as suas raízes na *acção sobre* e na *representação de*, o mundo físico e social. (Vergnaud, 1998, p. 167)

Alguns autores, como, por exemplo, Goldin (2002) e Greeno e Hall (1997) referem-se às representações como objectos (nomes) e acções (verbos). Esta caracterização é consistente com o indicado pelo NCTM (2000): "O termo representação refere-se simultaneamente a processo e a produto, por outras palavras, ao acto de capturar um conceito ou relação matemática através de uma determinada forma e à forma em si mesma" (p. 67). Para o NCTM (2000), o termo representação refere-se, também, "a processos e a produtos que são observáveis externamente bem como àqueles que ocorrem internamente na mente das pessoas que fazem Matemática" (p. 67).

Kaput (1987, 1998) também se refere às representações como meios através dos quais os indivíduos dão sentido a situações. As representações podem ser uma combinação de alguma coisa escrita no papel, alguma coisa existente na forma de objectos físicos ou um arranjo de ideias cuidadosamente construídas na mente de um indivíduo. No âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática, Tripathi (2008) considera que uma representação é, essencialmente, "um constructo físico ou mental que descreve aspectos da estrutura inerente a um conceito e as inter-relações entre o conceito e outras ideias" (p.

438). Deste modo, ambos os autores consideram que as representações podem ser externas ou internas ao indivíduo.

Esta relação entre uma representação externa e uma representação interna correspondente é, talvez, a mais destacada na literatura. Como refere Goldin (2002): "Para discutir as representações, devemos ser capazes de considerar pelo menos configurações de símbolos ou objectos externos ao aprendente individual ou resolvedor de problemas, configurações internas ao indivíduo e relações entre elas" (p. 198). Para este autor, o estudo das representações envolve variáveis externas que são directamente acessíveis à observação, em conjunto com outras, os constructos internos, que requerem algum cuidado pois, frequentemente, a sua inferência depende do contexto. A dicotomia interna/externa merece, então, ser analisada em maior detalhe.

Representações internas e externas

De uma forma explícita, Goldin (1998, 2002), tal como muitos outros autores, fazem uma distinção entre representações "internas" e "externas". As representações internas estão ligadas a possíveis configurações mentais dos indivíduos (aprendentes ou resolvedores de problemas) e são construídas por eles a partir da observação de comportamentos (Goldin & Kaput, 1996). Estas representações não podem ser mostradas ou comunicadas a outras pessoas, apenas podem ser inferidas a partir das da produção de representações externas pelo próprio indivíduo. As representações externas referem-se a configurações observáveis e físicas que têm como objectivo representar uma certa realidade (Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger, 1987). Deste modo, as representações externas são facilmente acessíveis através de observação, por qualquer indivíduo com conhecimento adequado, e podem ser exibidas ou comunicadas a outras pessoas. Exemplos destas representações externas são as representações verbais, gráficas, algébricas ou simbólicas, pictóricas (diagramas ou desenhos), tabelares e outras.

Zhang (1997) também distingue as representações em externas e internas. Para o autor, as representações externas são definidas como o conhecimento e a estrutura no ambiente, como símbolos físicos, objectos ou dimensões e como regras externas ou relações incluídas em configurações físicas. A informação nestas representações só pode ser seleccionada, analisada e processada através de sistemas perceptuais, embora o conhecimento conceptual das representações internas possa, algumas vezes, facilitar ou inibir os processos perceptuais. Pelo seu lado, as representações internas são o conhecimento e a estrutura em memória, como proposições, produções, esquemas, redes neuronais e outras formas. A informação neste tipo de representações tem que ser obtida a partir da memória através de processos cognitivos, sendo preciso ter em atenção que as 'pistas' nas representações externas podem, algumas vezes, confundir os processos de aquisição de informação. As representações externas podem ser transformadas em representações internas através da memorização. No entanto, esta internalização não é necessária se as representações externas estiverem sempre disponíveis e, além disso, pode não ser possível se as representações externas forem demasiado complexas.

Goldin (2008) considera ainda que as configurações representacionais individuais (palavras, números, gráficos ou equações algébricas) raramente podem ser compreendidas de forma isolada. Na sua perspectiva, elas pertencem, naturalmente, a estruturas mais amplas: "Quer se esteja a falar de representações matemáticas ou não matemáticas, descobre-se que elas pertencem naturalmente a sistemas mais alargados" (Goldin, 2008, p. 179). Por isso, apresenta a noção de sistema representacional e os seus diversos tipos como o constructo chave de um modelo psicológico unificado da aprendizagem e da resolução de problemas matemáticos. Segundo o autor, um sistema representacional tem como "componentes primitivas" os caracteres ou sinais que podem pertencer a um "conjunto bem definido", tais como os caracteres de um sistema de lógica simbólica ou as letras de um alfabeto. No entanto, estas componentes podem também ser entidades "parcialmente definidas" ou "ambiguamente definidas", tais como objectos da vida real e seus atributos. Os sinais são combinados, através de regras, em "configurações permitidas". Estas configurações, por seu turno, também podem ser especificadas através de regras "bem definidas", "parcialmente definidas" ou "ambiguamente definidas" (Goldin, 2002, p. 210). As configurações evoluem, tornam-se mais complexas ou alteradas, sendo baseadas na relação com outras configurações. O sistema representacional é caracterizado por uma estrutura superior, a qual relaciona as configurações de forma significativa e fornece significado aos sinais e às próprias configurações (Goldin, 2002).

Para Goldin (1998), os sistemas de representação externa compreendem os sistemas simbólicos convencionais da Matemática, tais como a numeração em base dez, a notação formal algébrica, a recta real ou a representação em coordenadas cartesianas. As representações internas são as atribuições de significado às notações matemáticas, por parte dos alunos. O autor inclui também como representações internas a linguagem natural dos alunos, a sua imaginação visual e representação espacial, as suas estratégias e heurísticas de resolução de problemas e, ainda, os seus afectos em relação à Matemática.

Duval (1999) distingue entre representações semióticas e mentais mas também sublinha a importância da coordenação entre sistemas de representação. As representações semióticas são um meio que um indivíduo dispõe para exteriorizar as suas representações mentais, quer dizer, para torná-las visíveis ou acessíveis aos demais. Para o autor, os objectos matemáticos são peculiares pois não são acessíveis por eles próprios mas apenas através de representações, em registos adequados: "A única forma de aceder e lidar com eles é usando sinais (signos) e representações semióticas" (Duval, 2006, p. 107). Por essa razão, as actividades sobre o objecto matemático ocorrem sempre pela sua representação semiótica, sendo essa representação, portanto, essencial à actividade cognitiva. De facto, certas representações são tão proximamente associadas ao conceito que é difícil imaginar como é que o conceito pode ser concebido sem ela. No entanto, para Duval (1999), os objectos matemáticos (números, funções, rectas) não podem, nem devem, ser confundidos com as suas representações (escrita decimal ou fraccionária, gráficos, traçados de figuras), uma vez que um mesmo objecto matemático pode ser indicado através de representações muito diferentes.

Apesar desta distinção entre as representações internas e externas, diversos autores sublinham e justificam, nas suas teorias, a importância de uma relação mais ou menos directa entre ambas. Goldin (2002) salienta a importância do acesso às representações externas para descrever o que os alunos, professores ou matemáticos fazem internamente, uma vez que só é possível fazer inferências sobre as representações internas dos alunos através da produção de representações externas: "As representações internas encontram-se codificadas fisicamente e a sua descrição a nível cerebral ainda não é conhecida em detalhe" (p. 210). É esta também a perspectiva de Hiebert e Carpenter (1992): "A forma como um aluno se relaciona com ou gera uma representação externa, revela a forma como representou essa informação internamente" (p. 66).

É ainda de destacar a abordagem bidireccional das representações, feita por Goldin (2002). Para o autor, não só o externo representa o interno, por exemplo, quando um aluno expressa o que tem em mente ao desenhar um gráfico, mas também o interno representa o externo, ou seja, o aluno visualiza o que é descrito por um gráfico ou por uma fórmula algébrica. Além disso, a pesquisa sobre representações indica que através da interacção entre sistemas de representação externa, desenvolvem-se sistemas de representação internos para os alunos poderem produzir novas representações externas. Assim, de acordo com Goldin (2002), um objectivo fundamental da educação matemática é o desenvolvimento, pelos alunos, de sistemas internos de representação eficientes que correspondam de maneira coerente, e interactuem bem, com os sistemas externos da Matemática, convencionalmente estabelecidos.

Parece, pois, inquestionável, a existência de uma relação estreita entre representações internas e externas, ambas essenciais na aprendizagem da Matemática. De facto, é esta interacção de dois caminhos, entre representações internas e externas, que ajuda a promover a compreensão e o desenvolvimento de conceitos matemáticos (Zhang, 1997). Goldin (1987) admite que é de esperar "considerável semelhança entre sistemas de representação internos de um indivíduo e os sistemas de representação externos, os quais são directamente observáveis – particularmente porque o comportamento que queremos explicar por meio de sistemas internos é manifestado externamente" (p. 136). Zhang (1997) toma a mesma posição e argumenta: "Muita da estrutura da mente interna é uma reflexão da estrutura do ambiente externo" (p. 179). Goldin (1987) acrescenta, no entanto, que é necessário algum cuidado em distinguir entre sistemas que têm como objectivo modelar estados internos de um resolvedor de problemas e os que tencionam representar comportamentos externos.

Para o propósito deste estudo, o termo representação irá ser limitado à sua categoria externa e é interpretado sob a perspectiva de Greeno e Hall (1997) como uma ferramenta usada para raciocinar, construir compreensão e representar ideias matemáticas. Assim, quando o termo representação é usado sem referência "externo" ou "interno", é porque se refere a uma representação externa.

Representações externas

O papel das representações externas

As representações externas estão envolvidas em muitas tarefas cognitivas, tais como as operações com papel e lápis, as compras numa mercearia com uma lista escrita, a resolução de problemas geométricos, a compreensão de um gráfico, um jogo de xadrez e muitas outras. Em cada uma destas tarefas, as representações externas desempenham papéis muito específicos (Zhang, 1997).

Uma característica importante da actividade matemática é a sua dependência de uma grande diversidade de representações externas. O acesso aos objectos matemáticos, que não têm uma natureza real, depende do recurso a representações semióticas, previamente definidas na Matemática escolar (Duval, 1999, 2006). Algumas representações são principalmente notacionais e formais, como os sistemas de numeração, a escrita de expressões algébricas para designar relações e operações, funções, derivadas e integrais ou as linguagens de programação. Outras mostram relações de maneira visual ou gráfica, como figuras geométricas, gráficos, diagramas ou esquemas. As representações externas podem, assim, denotar e descrever objectos materiais, propriedades físicas, acções e relações, ou objectos que são muito mais abstractos (Goldin, 1998).

Na opinião de Zhang (1997), as representações externas não são meros "*inputs*" e estímulos para a mente interna, desempenhando funções muito mais importantes do que meros auxiliares de memória: "[As representações externas] são tão intrínsecas a tantas tarefas cognitivas que conduzem, limitam e até determinam o comportamento cognitivo" (p. 180). Acrescenta, ainda, que a forma de uma representação pode influenciar o comportamento na resolução de problemas: "A forma de uma representação determina qual a informação que vai ser percebida, quais os processos que vão ser activados e quais as estruturas que podem ser descobertas a partir de uma representação específica" (p. 179).

Segundo Duval (1999), são quatro as funções que as representações podem preencher: comunicação, tratamento, objectivação e identificação. A primeira é a função de transmissão de uma mensagem ou de uma informação entre indivíduos e, por isso, requer a utilização de um código comum entre eles. A segunda é a função que transforma uma representação numa outra, utilizando unicamente as possibilidades de funcionamento do sistema de representação mobilizado. A terceira, a objectivação, corresponde ao uso de um registo de representação para permitir, a um indivíduo, tomar consciência daquilo que ainda não o tinha feito. É o trabalho de exteriorização e, às vezes, esta função é confundida com a função de comunicação porque origina uma produção oral ou gráfica. Estas três primeiras funções são, para Duval, fundamentais para o funcionamento cognitivo. A função de identificação torna-se importante e é imediatamente utilizada quando é preciso encontrar, ou reencontrar, um dado ou uma informação, entre muitas outras, que é solicitado na análise de um problema.

Ao longo das últimas décadas, muitos esforços da investigação em educação têm sido investidos no estudo dos efeitos das representações externas na aprendizagem da Matemática. Por exemplo, Greeno e Hall (1997) afirmam que as representações são ferramentas úteis para raciocinar, construir compreensão e para comunicar informações. Sublinham, ainda, a importância dos alunos se empenharem na escolha e na construção das suas próprias representações para resolver um problema matemático (em formas que os ajudem a ver padrões, realizar cálculos e tirar partido do facto dessas diferentes formas fornecerem diferentes suportes para a realização de inferências). De igual modo, Cox (1999) argumenta que o processo de construção de uma representação ajuda os alunos a melhorar o seu conhecimento. Para o autor, a construção de representações pode ter diferentes propósitos. Por exemplo, para os alunos com pouco ou nenhum domínio do conhecimento pode ajudar a construir esse conhecimento. Para os alunos com níveis avançados de domínio de conhecimento, a construção da representação pode servir como ajuda para aceder à informação armazenada na memória de longo prazo e como sumário do seu processamento, o que diminui a carga do trabalho de memória e os ajuda a concentrar-se no raciocínio.

Tipos de representações externas

A própria evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação das representações. Assim, não é de estranhar que surjam na literatura um sem número de tipologias de classificação de representações externas, dependendo do domínio de conhecimento que se considere (semiótica, ciências cognitivas, etc.). Por exemplo, Bruner (1966) refere as representações inactivas, icónicas e simbólicas e associa-as a estádios de desenvolvimento das crianças. As representações inactivas estão associadas à acção (justificando o recurso a materiais manipuláveis para criar modelos favoráveis à construção de conceitos), as representações icónicas assentam no uso de figuras, imagens, esquemas, tabelas ou desenhos, pelo que também são referidas como representações visuais. As representações simbólicas são as mais complexas que apelam ao uso de linguagens simbólicas.

Na perspectiva de Lesh, Post e Behr (1987a), as representações externas são a forma pelas quais uma ideia matemática pode ser comunicada e é apresentada através de objectos físicos, desenho, linguagem falada ou escrita com símbolos. Os autores sugerem uma classificação de representações matemáticas como: (i) concretas (manipulativas); (ii) linguagem; (iii) simbolismo (notação); (iv) semi-concretas (pictóricas); e (v) contextuais (situações do mundo real). Este esquema de classificação ajuda a diferenciar as muitas formas de conceitos matemáticos e também dá indicação das capacidades que são específicas de cada forma. Para Tripathi (2008), desde que a classificação acima foi posta em uso, o repertório de representações acessíveis aos alunos expandiu-se, em parte por causa da fácil disponibilidade de tecnologias tais como as calculadoras gráficas e o *software* matemático. Em particular, o âmbito das representações semi-concretas ou pictóricas tem-se expandido de tal forma que a autora considera o termo representações visuais como uma melhor alternativa para designar as representações semi-concretas ou pictóricas. Nestas representações visuais, Tripathi (2008) inclui: "Formas como tabelas ou diagramas organizados, modelos concretos, gráficos, metáforas, imagens dinâmicas ou em movimento e *word pictures* (a descrição em palavras do que estamos a tentar realizar)" (p. 440). Este modelo tem fortes semelhanças com a classificação das representações matemáticas referido em Clement (2004), constituído por cinco tipos de representações, que o autor considera ser útil para planificar o ensino e analisar as respostas dos alunos: (i) representações pictóricas; (ii) representações através de materiais manipuláveis; (iii) linguagem oral; (iv) símbolos escritos (símbolos matemáticos ou palavras associadas aos símbolos); e (v) situações relevantes (contextos frequentes, mas não necessariamente, conectados com a vida real que envolvem ideias matemáticas e despertam interesse dos alunos).

Como sistemas de representação externos, Goldin e Shteingold (2001), indicam dois tipos: (i) notacionais e formais – que incluem o sistema de numeração, a forma de escrever e manipular expressões algébricas e equações, as convenções para denotar funções, derivadas e cálculo de integrais e as linguagens informáticas; e (ii) relações visuais e espaciais – incluindo rectas numéricas, gráficos (cartesianos, polares ou outros sistemas de coordenadas), tabelas e diagramas geométricos. Acrescentam, ainda, que palavras e frases, faladas e escritas, também são representações externas pois podem descrever objectos materiais, propriedades físicas, acções e relações ou coisas mais abstractas.

Na teoria de registos de representação semiótica de Duval (1999, 2006), as representações semióticas utilizadas em Matemática compreendem quatro tipos de registos (apresentados no Quadro 2.4): Os registos multifuncionais e os registos monofuncionais, cada um deles nas suas representações discursivas e não discursivas. Os registos monofuncionais tomam a forma algorítmica (sistemas de escrita matemática – representações discursivas; gráficos cartesianos – representações não discursivas) e têm como função cognitiva o processamento matemático. Os registos multifuncionais não tomam a forma algorítmica (linguagem materna e formas de raciocínio – representações discursivas; figuras geométricas – representação não discursiva) e visam uma variedade de funções cognitivas, como a comunicação e a imaginação (Duval, 2006).

Quadro 2.4
Classificação dos diferentes registos que podem ser mobilizados nos processos matemáticos (adaptado de Duval, 2006, p. 105)

	Representação discursiva Resultante de uma de três tipos de operações discursivas: 1 – Indicação de objectos; 2 – Confirmação de relações ou propriedades; 3 – Inferência (dedução, cálculo…).	**Representação não-discursiva** Configurações de formas de dimensão 0, 1, 2 e 3.
Registos multi-funcionais Os processos não se podem converter em algoritmos	LINGUAGEM NATURAL Duas modalidades não equivalentes de expressão: - Oral/Verbal (explicações); - Escrita (visual): teoremas, provas...	ICÓNICAS: desenhos, esboços, padrões; NÃO ICÓNICAS: figuras geométricas que podem ser construídas com ferramentas.
Registos mono-funcionais A maioria dos processos é algoritmos	SISTEMAS DE NOTAÇÃO Só escrito (impossível dizer de outra forma que não seja de grafia): 1 - Numérico (decimal, binário,…); 2 – Algébrico; 3 - Simbólico (linguagens formais).	GRÁFICOS Combinações de formas D0 e D1, diagramas, gráficos.

A característica que sobressai da actividade matemática é a mobilização simultânea de, pelo menos, dois registos de representação ou a possibilidade de mudar, em qualquer momento, de um registo para outro (Duval, 2006). De acordo com este autor, a actividade matemática pode ser analisada em dois tipos de transformações de representações semióticas: (i) os tratamentos, transformações de representações que têm lugar dentro do mesmo registo onde foram formadas; e (ii) as conversões, transformações de representação que consistem numa mudança de sistema na qual a totalidade ou a parte do sentido da representação inicial é conservada, sem mudança de objectos a ser notada. A noção de registos de Duval (1999) realça, ainda, a importância dos alunos serem capazes de trabalhar dentro e entre diferentes registos, com fluência na conversão de representações neste movimento.

Representações externas na aprendizagem da Matemática e na resolução de problemas

Dentro da diversidade de representações matemáticas descritas, há algumas que se destacam pela atenção que têm merecido de vários autores, que as exploram com maior profundidade, relativamente ao seu papel na aprendizagem da Matemática.

A linguagem natural e simbólica. Boero, Douek e Ferrari (2008) focam-se na linguagem natural e na sua relação com a linguagem simbólica, própria da Matemática e defendem a sua função central em "todos os registos que estão significativamente envolvidos em fazer, ensinar e aprender Matemática" (p. 265). Para os autores, a maioria dos registos matemáticos são baseados na linguagem natural, da qual eles pedem emprestados formas e estruturas e podem incluir componentes simbólicas ou visuais. Por isso, "só se os alunos atingirem um nível suficiente de familiaridade com o uso de linguagem natural nas actividades propostas é que podem realizar de modo satisfatório e aproveitar completamente essas actividades" (Boero et al., 2008, p. 262).

A linguagem natural tem sido a principal forma de expressar as relações algébricas fundamentais. A invenção do simbolismo algébrico fornece-nos uma ferramenta poderosa e apropriada para tratar problemas algébricos e para aplicar métodos algébricos a outros campos da Matemática e a outros domínios científicos, como a Física ou a Economia (Boero et al., 2008). Uma ideia partilhada pelos professores de Matemática é que o simbolismo algébrico, uma vez aprendido, é suficiente para tratar uma grande variedade de problemas. No entanto, os autores argumentam que "todas as opiniões que subestimam o papel da linguagem natural na aprendizagem não se ajustam aos actuais processos de resolução de problemas algébricos" (p. 266). Mesmo que no passado, o simbolismo algébrico tenha sido introduzido como oposto à linguagem natural, e mesmo que nalguns casos isso possa ser verdadeiro, existe bastante evidência sugerindo que as relações entre a linguagem natural e o simbolismo algébrico são mais complexas. Boero et al. (2008) referem que uma das razões que contribui para essa complexidade é o facto de existirem várias expressões algébricas que não são "semanticamente congruentes" com as expressões verbais correspondentes. E dão como exemplo a expressão "x é ímpar" que não pode ser directamente traduzida pois a sua representação simbólica requer uma reorganização profunda resultando numa expressão que envolve um quantificador e outra variável que não corresponde a nada existente na expressão original: "existe um y tal que $x = 2y + 1$". Outra importante fonte de problemas é o facto de a linguagem natural empregar uma grande variedade de expressões indexicais[1], como, por exemplo, "A idade da Maria" ou "Este número" que são automaticamente actualizadas de acordo com o contexto mas não estão disponíveis no simbolismo algébrico. Assim, as características peculiares do simbolismo algébrico tornam-se uma vantagem pois possibilitam transformar uma expressão algébrica de modo a preservar o seu significado e a produzir novas expressões que são mais fáceis de interpretar mas que mostram a limitação intrínseca da linguagem algébrica em comparação com a linguagem natural.

Uma outra situação em que grande parte dos professores fazem prevalecer o uso de linguagem simbólica diz respeito aos quantificadores, especialmente na abordagem à Análise Matemática (na Matemática avançada). As definições e provas são frequentemente escritas recorrendo ao uso de quantificadores. O uso de quantificadores pelos alunos também é encorajado e, neste caso, a necessidade da utilização da linguagem natural depende das ligações que é necessário estabelecer entre a estrutura lógica da conjectura e a sua interpretação no contexto dado (Boero et al., 2008).

As diferentes funções da linguagem natural no ensino e aprendizagem da Matemática e, em particular a comunicação na sala de aula, têm recebido atenção na literatura em educação matemática (por exemplo, Ongstad, 2006; Sfard, 2001). Com base nesses estudos, Boero et al. (2008) fazem uma análise das funções específicas que a linguagem natural desempenha no desenvolvimento do trabalho teórico em Matemática e suas implicações para a educação. Consideram que essas funções são: (i) mediador entre processos mentais, expressões simbólicas específicas e organizações lógicas nas actividades matemáticas (em particular, consideram as inter-relações entre a linguagem natural e a algébrica); (ii) ferramenta flexível, cuja destreza pode ajudar os alunos a gerir linguagens específicas; (iii) mediador na dialéctica entre a experiência, a emergência de objectos e propriedades matemáticas e o seu desenvolvimento em sistemas teóricos; e (iv) Ferramenta em actividades relacionadas com a validação de conjecturas (encontrar contra-exemplos, produzir e gerir argumentos aceitáveis para validação, etc.).

Boero et al. (2008) defendem a relevância de todas estas funções e relatam algumas experiências de ensino (maioritariamente ao nível universitário) que mostram como os professores têm um forte compromisso em aumentar o desenvolvimento de competências linguísticas dos alunos através da produção, comparação e discussão de conjecturas, provas e soluções de problemas matemáticos. Num primeiro exemplo o objectivo é

[1] No original, *indexical expressions*.

analisar o papel que a linguagem natural tem na resolução de problemas de Matemática avançada. Os alunos são solicitados a explicarem as suas respostas a um problema e, apesar de não haver menção a um texto escrito, alguns apresentam a sua argumentação em palavras (por vezes, juntando diagramas ou outros gráficos). Os resultados desta experiência evidenciam que as competências no uso da linguagem natural estão correlacionadas com o desempenho dos alunos na resolução de problemas algébricos e que o seu uso superficial no trabalho matemático pode entrar em conflito com semânticas específicas e convenções da Matemática, resultando no insucesso dos alunos. Outro aspecto salientado é que os alunos são capazes de adquirir algum conhecimento ou competências sobre a linguagem enquanto objecto mas não a usam como ferramenta semiótica para pensar sobre os problemas e para comunicar com os outros. Os resultados de uma outra experiência, em que analisam o conflito entre a linguagem natural e a linguagem simbólica, revelam que os alunos aplicam esquemas conversacionais de forma imprópria. Os autores atribuem este conflito à falta de flexibilidade que os alunos apresentam em relação ao uso de diferentes tipos de linguagem e consideram que um objectivo da educação matemática deve ser não só o ensino de linguagens (desde a natural até às simbólicas) mas também o seu uso flexível: "Os dados disponíveis sugerem uma implicação educacional central: a necessidade de desenvolver destreza em linguagem natural em actividades matemáticas como a chave para aceder ao controlo dos processos algébricos de resolução de problemas" (Boero et al., 2008, p. 271).

Estes autores usam o termo argumentação tanto para o processo que produz um discurso logicamente conectado (não necessariamente dedutivo) sobre um assunto como para o texto produzido por esse processo (que pode incluir argumentos linguísticos, dados numéricos, desenhos, etc.). Se considerado deste ponto de vista, a argumentação tem um papel crucial nas actividades matemáticas: intervém na formulação de conjecturas e prova como uma componente substancial dos processos de produção (Douek, 1999) e tem um papel crucial na construção de conceitos básicos durante o desenvolvimento de actividades matemáticas (Douek & Scali, 2000; Sfard, 1997).

Um dos pontos mais relevantes de distinção entre argumentação e prova matemática como produto é a linguagem adoptada. A argumentação pode usar uma grande diversidade de registos linguísticos, incluindo os conversacionais, enquanto a prova matemática, por várias razões, é compelida a usar registos linguísticos mais explícitos e institucionalizados. Por isso, Boero et al. (2008) defendem que são necessárias competências linguísticas para obter produtos socialmente aceites (provas) e salientam a imagem de prova enquanto prática complexa, com raízes culturais, mas também criativa, que necessita de destreza superiormente desenvolvida em linguagem natural e nas suas funções reflexivas, de controlo e de comando. Para estes autores, uma parte importante das dificuldades com a prova na Matemática escolar vem da confusão de prova enquanto processo e como produto, a qual resulta numa abordagem autoritária às duas actividades. Frequentemente, o ensino da Matemática é baseado na apresentação (pelo professor e depois pelo aluno quando é questionado para repetir definições e teoremas) do conhecimento matemático como uma teoria mais ou menos formalizada baseada em provas rigorosas. Deste modo, exige um processo de pensamento moldado pela forma da apresentação. Outra autora, Hanna (1989) analisa as relações complexas entre o modelo de apresentação dos resultados matemáticos e as ideias matemáticas que são para ser comunicadas. Argumenta que para uma pessoa apenas parcialmente treinada em Matemática, pode parecer que o modo de apresentação é o núcleo da prática matemática. Esta crença pode induzi-la a assumir que a aprendizagem da Matemática deve envolver treino e a capacidade para criar esta forma e então a sobrestimar o formalismo. Quanto às implicações educacionais da sua análise, argumenta que o formalismo deve ser visto como uma ferramenta a usar em todo o seu rigor, quando necessário, mas pode ser interpretado com alguma tolerância em muitas outras situações.

Existe evidência empírica sobre a hipótese que, em muitos casos, provar uma conjectura implica estabelecer uma ligação funcional com a actividade argumentativa necessária para compreender (ou produzir) a conjectura e reconhecer a sua plausibilidade (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri & Garuti, 1997). Boero et al. (2008) apresentam mais um exemplo, com alunos universitários, para mostrar a complexidade da actividade argumentativa necessária para realizar uma tarefa e defendem que tal complexidade envolve diferentes funções da linguagem natural em interacção com outros sistemas simbólicos. Os autores constatam que os alunos têm necessidade de expressar proposições algébricas em palavras quando procuram reconhecer uma possível conjectura. Esta atitude mostra a procura de uma compreensão semanticamente consistente com os sinais algébricos e que o trabalho construtivo em Matemática não pode evoluir só dentro de expressões formais. A linguagem natural é revelada, aqui, como uma ferramenta crucial para pensar. Observam, também, que quando elaboram um processo produtivo, muitos alunos encontram os argumentos sintácticos insuficientes e, assim, os argumentos com raízes semânticas (expressos em palavras) tornam-se críticos. De forma geral, a linguagem natural é usada para reflectir sobre a situação e gerir os processos de formalização e interpretação. Detectam, ainda, um método de resolução de problemas implícito, que passa por uma mudança de representação, a interpretação de cálculos em palavras e/ou vice-versa e a organização visual de dados e cálculos. São também visíveis mudanças de enquadramentos matemáticos (aritmética, álgebra, séries, etc.) em que a linguagem natural desempenha funções reflexivas e de comando sobre a mudança de enquadramentos e de representação.

Finalmente, Boero et al. (2008) concluem que estas funções complexas não podem ser preenchidas sem instrução apropriada. As discussões em sala de aula e negociações não são suficientes para atingir o nível de sofisticação e destreza em linguagem natural necessária para a usar de forma eficiente. O professor deve completar o complexo papel de mediação, incluindo, por um lado, a exploração das produções individuais dos alunos e, por outro lado, o uso de modelos culturais.

O foco no visual. Nos anos mais recentes, com o grande desenvolvimento das novas tecnologias e sua aplicação no ensino, as formas visuais de representação têm sido, talvez, o tópico mais investigado entre as diferentes representações. Isto acontece, em parte, porque são as que estão mais prontamente disponíveis mas também pelo seu papel na aprendizagem da Matemática e, em particular, na determinação da capacidade de resolução de problemas: "Fazer representações visuais de coisas é uma actividade cognitiva natural que é valiosa por boas razões. Por exemplo, as imagens visuais podem facilitar recordar os factos ou acontecimentos; podem também ser cruciais na procura de soluções para problemas matemáticos" (Ajose, 1999, p. 81). Estas representações servem, igualmente, de ponte entre objectos concretos que os alunos podem usar para desenvolver a compreensão de um conceito e as formas simbólicas ou verbais que têm que usar mais tarde para se referirem ao conceito (Ajose, 1999).

Arcavi (2003) também salienta o papel das representações visuais na aprendizagem da Matemática e define "visualização" como:

> A capacidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso de e reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, nas nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com o propósito de retratar e comunicar informação, pensar sobre e desenvolver ideias desconhecidas anteriormente e compreensões futuras. (p. 217)

O autor ainda identifica três funções que a visualização pode desempenhar no processo de aprendizagem: (i) suporte e ilustração de resultados essencialmente simbólicos (e possivelmente fornecer uma prova desses resultados); (ii) forma possível de resolver conflitos entre soluções (correctas) simbólicas e intuições (incorrectas); e (iii) forma de ajudar a recuperar fundamentos conceptuais que podem ser facilmente contornados por soluções formais, para os problemas. Deste modo, a representação visual "já não está relacionada com propósitos ilustrativos apenas, mas também é reconhecida como uma componente chave do raciocínio, da resolução de problemas e até do processo de prova" (p. 235).

Este tema da visualização em Matemática tem sido o cerne de muitos trabalhos desenvolvidos a partir de enfoques variados, que indicam que a capacidade de desenvolver e usar formas de representação visual é muito valiosa e, por isso, deve tornar-se uma parte integrante da aprendizagem da Matemática. O papel destas representações na aprendizagem e as dificuldades possíveis na sua utilização na sala de aula são também discutidos e analisados em contextos diferenciados, envolvendo tópicos distintos da Matemática elementar e avançada.

Procurando explorar a relação entre resolução de problemas e capacidades visuais, Stylianou e Silver (2004) comparam matemáticos e alunos universitários, analisando o uso potencial e actual das representações visuais na resolução de problemas matemáticos. Os resultados indicam que, embora ambos os grupos concebam estas representações matemáticas como estratégias viáveis, os matemáticos aplicam-nas a uma maior variedade de problemas (incluindo não geométricos). Além disso, os matemáticos usam as representações visuais mais frequente e dinamicamente para estudar e compreender o problema e planear a solução durante o processo de resolução de problemas, uma vez que estão cientes do valor que as formas de representação visual e outras ferramentas visuais têm para as heurísticas da descoberta matemática.

As representações gráficas no ensino da Matemática estão longe de se constituírem num meio de representação simples e evidente para os alunos. Particularmente, no ensino, privilegia-se muito mais a leitura e identificação de dados retirados de representações gráficas para fins de comunicação do que outras actividades, tais como a própria construção destas representações. No entanto, as representações gráficas constituem um suporte insubstituível para a compreensão da Matemática. Segundo Ajose (1999), as representações gráficas fornecem uma organização global estruturada de informação relevante para os alunos terem suporte para articular a sua actividade (matemática) e para realizarem uma sequência de acções. Mesmo que o trabalho realizado seja complementado com o uso de registos algébricos e numéricos, os registos gráficos têm um papel mediador entre a situação colocada e o uso de resultados matemáticos apresentados através de notação formal.

Frota (2004) descreve uma investigação acerca do uso de estratégias gráficas de alunos de engenharia na aprendizagem de Cálculo. Um dos aspectos que os resultados das entrevistas realizadas aos alunos permite salientar é que praticamente não é utilizada a estratégia de representação gráfica das situações matemáticas apresentadas. Todos os alunos entrevistados respondem que se limitam a esboçar os gráficos, quando o seu emprego é naturalmente sugerido, por exemplo, para o cálculo de áreas ou volumes. Além disso, nenhum dos alunos pensa em utilizar uma interpretação gráfica para resolver integrais, estratégia que, nalguns casos, pode evitar a realização de cálculos morosos e complicados ou mesmo o uso indevido do Teorema Fundamental do Cálculo Integral. Só quando explicitamente solicitados, é que os alunos utilizam a representação gráfica para confirmar os resultados obtidos numericamente e, nessa altura, são capazes de detectar os problemas na solução algébrica apresentada. Para alguns alunos, a estratégia gráfica é eliminada logo ao princípio, pelas alegadas dificuldades de não saberem esboçar o gráfico e pela dificuldade na visualização espacial. Assim, a autora constata, por um lado, dificuldades do aluno visualizar imagens e representações gráficas de figuras espaciais e, por outro, dificuldades em esboçar os gráficos, mesmo estando na posse de uma calculadora gráfica. Mesmo os alunos que sabem manipular calculadoras gráficas com desenvoltura, mostram-se reticentes quanto ao uso de estratégias gráficas e, em nenhum momento, a máquina de calcular é utilizada para procurar compreensão de valores numéricos ou para testar resultados, independentemente de seu emprego para traçar gráficos. Estes resultados confirmam outros similares, de outros estudos, permitindo concluir que, ao lidar com integrais, os alunos ignoram o esboço do gráfico, buscando, quase sempre, a solução algébrica das questões (Eisenberg, 1991).

Há uma forma de representação que, por parecer simples e directa, é comum e frequente no ensino da Matemática. Trata-se da representação em tabela, ou seja, numa disposição em linhas e colunas (Flores & Moretti, 2005). Porém, esta simplicidade de acesso às informações, a homogeneidade visual e a forma organizada de distribuição de dados, são só aparentes. Ler uma tabela, segundo Flores e Moretti (2005), não é uma tarefa tão imediata, uma vez que essa leitura exige, por parte do leitor, uma certa desenvoltura visual e um empenho cognitivo. Ler, interpretar, analisar e julgar ou organizar dados em tabelas significa, antes de tudo, dominar o próprio funcionamento representacional.

Para analisar a contribuição cognitiva das tabelas, e as suas diferentes utilizações, é preciso distinguir dois pontos importantes: a própria organização representacional, ou seja, a composição semiótica das tabelas, e as funções cognitivas que elas preenchem (Flores & Moretti, 2005). As tabelas possuem determinadas vantagens como, por exemplo, o facto de permitirem a visualização dos dados de forma separada, preenchendo assim, explicitamente, a função cognitiva de identificação (Duval, 1999). Este autor considera, ainda, uma outra função cognitiva requerida no uso de tabelas: o tratamento. Nem sempre é suficiente a identificação imediata de uma informação, ou de um dado. A modificação de uma representação numa outra, a partir das possibilidades de funcionamento do sistema semiótico em questão também pode ser necessária. É preciso, portanto, realizar procedimentos diversos, tais como comparações entre linhas ou colunas, operações entre dados, inclusões ou permutações de dados. Na organização representacional das tabelas é visível a disposição dos dados, ou informações, em linhas e em colunas. No entanto, esta não é uma característica exclusiva das tabelas (a utilização de uma forma quadriculada aparece, igualmente, nas representações cartesianas) e, portanto, não é suficiente para descrever o funcionamento representacional das tabelas. Duval refere outra diferença importante entre as tabelas e, por exemplo, os gráficos cartesianos. Segundo o autor, uma tabela é essencialmente finita, enquanto um gráfico cartesiano não é. Essa diferença é fundamental, uma vez que estes dois tipos de representação mobilizam tratamentos diferentes. Além disso, mesmo que todas as tabelas pareçam iguais elas não funcionam todas da mesma maneira e não requerem as mesmas possibilidades de tratamentos.

Flores e Moretti (2005) referem, também, os dois grandes grupos para a análise semiótica e cognitiva das tabelas: (i) tabelas que se constituem apenas como um "banco de dados", servindo apenas para uma consulta rápida e, portanto, um custo cognitivo bastante baixo. A leitura deste tipo de tabela é feita a partir de uma exploração vertical, ou horizontal, de uma ponta a outra, com paragem sobre a célula correspondente ao dado indicado na questão que motiva a exploração; e (ii) tabelas que permitem o aparecimento de novos dados, fazer inferências sobre a existência de relações ou de elementos ainda não conhecidos ou mostrar a necessidade de distinções que até então não tinham sido tidas em conta. A leitura deste tipo de tabela implica numa dupla exploração, vertical e horizontal e, além disso, essa exploração deve ser simultânea.

Esta diversidade de tabelas ou de modos de as representar graficamente, gera uma diversidade de funções cognitivas que elas podem preencher, sendo a de identificação a mais evidente (Flores & Moretti, 2005). Isto tem implicações, também, na diversidade e na riqueza de tarefas que se podem realizar a partir de uma mesma tabela. Os autores concluem, assim, que compreender os processos cognitivos requeridos no uso de tabelas, no ensino de Matemática, significa entender o funcionamento representacional que gera apreensões de leitura e tratamentos específicos. Para os autores, usar tabelas na educação matemática não significa usá-las apenas no seu modo mais frequente, ou seja, para situações de comunicação, que preenchem apenas a função cognitiva de identificação. O ensino deve incluir outras tarefas que não sejam só a leitura de tabelas. Por exemplo, a própria construção de tabelas, a sua interpretação e o preenchimento ou a reunião de dados ou informações para serem organizados noutra tabela, devem ser igualmente valorizadas e, sobretudo, tratadas como objecto de estudo e de aprendizagem. No caso das tabelas, elas não são representações autónomas, como aliás todas as representações que privilegiam a visualização. Isto quer dizer que elas se articulam de maneira explícita, ou implícita, com representações num outro registo. Esta articulação, que diz respeito à interacção entre a tabela e o enunciado verbal do problema ou a escrita algébrica, é essencial uma vez que é a mudança entre os registos que possibilita uma leitura global das representações gráficas e, em particular, das tabelas.

A figura desempenha um papel importante na aprendizagem da Geometria, sobretudo na resolução de problemas, pelo seu suporte intuitivo e por desempenhar uma função heurística (Flores & Moretti, 2006). Para Duval (2004), as figuras (na representação geométrica) permitem analisar uma situação em conjunto, são um meio mais directo para explorar os diferentes aspectos de um problema, antecipar os seus resultados e seleccionar uma forma de os resolver. Deste modo, as figuras geométricas podem constituir-se não só como instrumentos mediadores de conhecimentos geométricos, mas também, como instrumentos auxiliares no desenvolvimento da visualização, compreensão e resolução de problemas matemáticos.

Diversas pesquisas em educação matemática, nos últimos tempos, constatam a importância do uso de figuras, que representam situações matemáticas concretas, para a aprendizagem da Geometria e, sobretudo, na resolução de problemas. Flores e Moretti

(2006) desenvolvem um trabalho de reflexão sobre a função heurística das figuras geométricas na resolução de problemas matemáticos. Isto é, pretendem analisar qual o papel que a figura propriamente dita desempenha (ou seja, o tratamento que se pode fazer numa figura geométrica) para encontrar uma solução para um problema matemático. Segundo os autores, a produtividade heurística de uma figura, para a resolução de problemas matemáticos, é dependente da possibilidade de se modificar esta figura noutras formas, ou seja, de se aplicar nela "tratamentos figurais" (Flores & Moretti, 2006, p. 7). Com base em exemplos do uso de reconfigurações na resolução de problemas sobre Geometria, por alunos do ensino fundamental, os autores salientam que as possibilidades heurísticas de uma figura requerem não só capacidade visual mas, também, o domínio de conhecimentos matemáticos. Concluem, ainda, que pensar o caso da reconfiguração de figuras geométricas no ensino da Matemática, como possibilidade heurística na resolução de problemas, significa fornecer ao aluno novas formas de resolução de uma mesma actividade matemática e possibilitar-lhe uma desenvoltura nas suas formas de raciocinar. Isto porque as capacidades para visualizar uma figura em diferentes posições, prever consequências da aplicação de determinados movimentos sobre figuras geométricas e tratar de diferentes formas as informações visuais, podem ser desenvolvidas mediante a aprendizagem desta operação de reconfiguração. A preferência por métodos didácticos que privilegiam a visualização, com ênfase na heurística para a resolução de problemas matemáticos, vem do facto de os autores acreditarem que o incentivo a tal capacidade poderá suprir uma deficiência do ensino convencional pois na generalidade das escolas e universidades, os aspectos ligados à visualização e às heurísticas, têm sido pouco enfatizados.

Para resolver problemas de Geometria, muitas vezes os alunos recorrem a desenhos (fazem esboços, rabiscam, traçam figuras em perspectiva, etc.) que são, frequentemente, chamados de representações pictóricas. Como refere Viana (2007), nas aulas de Geometria, a experiência tem mostrado que os alunos produzem representações pictóricas muitas vezes influenciados pelas representações que o professor costuma apresentar quando resolve os problemas na aula. O estudo desenvolvido por esta autora analisa as formas de representação pictórica utilizadas por alunos do ensino médio quando resolvem problemas de um teste de Geometria espacial. Para a análise dos resultados, classifica as representações pictóricas construídas pelos alunos em três categorias (com várias subcategorias) baseadas nos seguintes critérios: funcionalidade, coerência com as informações do problema e detalhe dos processos utilizados pelo aluno na resolução dos problemas. Os resultados do estudo revelam que a maioria dos alunos faz representações pictóricas numa primeira fase de obtenção da informação geométrica, cuja função parece ser representar o conceito geométrico espacial ao qual o problema (que fornece a informação na forma verbal) se refere. As representações pictóricas servem também, numa segunda fase, para o processamento das informações geométricas do problema, através da inspecção da imagem. Os alunos utilizam-nas para organizar contagens, explorar propriedades e sistematizar cálculos. Para além disso, parecem ter a função de "assistência perceptual", mesmo nos casos em que o problema apresenta parte das informações na forma pictórica, em que os alunos usam novas representações pictóricas para refinar as imagens fornecidas (por exemplo, representando os objectos de forma ampliada). Os resultados também salientam que as representações construídas pelos alunos nem sempre são coerentes, isto é, expressam só parte das propriedades e das relações ou mostram uma organização que não está de acordo com o problema. Apesar disso, as representações pictóricas dos alunos parecem ter ajudado a organizar o raciocínio para encaminhar a resolução do problema.

Embora as investigações sugiram que há muito a ganhar ao nutrir conscientemente as capacidades dos alunos para usar as representações visuais nas suas actividades cognitivas, estas formas de representação mantêm-se como um "cidadão de segunda classe" tanto na teoria como na prática matemática (Ajose, 1999). A ênfase que os professores mostram nas suas abordagens algébricas/algorítmicas quando ensinam os conceitos matemáticos tem promovido situações em que os alunos evitam as considerações visuais quando resolvem problemas. Este costume é, segundo Eisenberg e Dreyfus (1991), baseado na crença de que "Matemática é não visual" (p. 30). Estes autores referem, ainda, que "muitos alunos são relutantes em aceitar os benefícios da visualização de conceitos matemáticos" (p. 25) porque pensar de forma visual tem exigências cognitivas superiores às requeridas para pensar de forma algorítmica.

Estas dificuldades encontradas por professores são identificadas também por Arcavi (2003) que as classifica como culturais ("visual não é matemático"), cognitivas ("visual é mais difícil") e sociológicas ("ensinar visualmente é mais difícil"). Uma dificuldade cultural refere-se às crenças e valores mantidos sobre o que significa Matemática e fazer Matemática e sobre o que é legítimo ou aceitável e o que não é, em Matemática. Este aspecto é particularmente controverso em relação ao recentemente discutido estatuto das provas visuais e o facto de não haver consenso entre a comunidade matemática sobre o que é uma prova (visual) deixa pouco espaço para se incorporar e valorizar as representações visuais como uma parte integrante do fazer Matemática. A análise das dificuldades cognitivas inclui, entre outras coisas, a discussão sobre se o visual é mais fácil ou mais difícil. O raciocínio com conceitos, em contextos visuais, pode implicar que nem sempre haja 'rotinas' procedimentais onde se basear. Consciente ou inconscientemente, tais situações podem ser rejeitadas pelos alunos (e possivelmente também pelos professores) com o fundamento de serem muito arriscadas ou pouco exactas. Outra dificuldade cognitiva surge quando é necessário efectuar traduções flexíveis entre representações visuais e analíticas da mesma situação, as quais estão no centro da compreensão da Matemática. Dentro das dificuldades sociológicas, o autor inclui o que Eisenberg e Dreyfus (1991) consideram problemas de ensino. Muitos professores sentem que as representações analíticas, que são sequenciais por natureza, parecem ser mais apropriadas e eficientes pedagogicamente. Uma outra dificuldade (mais sócio-cultural) é a tendência actual das escolas, e em particular as aulas de Matemática, se constituírem em espaços multiculturais, com alunos oriundos de vários *backgrounds* sociais. Alguns alunos vêm de culturas visualmente ricas e para eles, a visualização pode servir para neutralizar possíveis falhas. Pelo contrário, os "visualizadores" podem estar sub representados entre os alunos com um nível de desempenho matemático mais elevado (Presmeg, 1986).

Representações múltiplas

O papel das representações múltiplas

Um dos aspectos que as tipologias de classificação das representações atrás descritas permitem sublinhar é a diversidade de formas que pode assumir a representação de ideias matemáticas. É a diversidade de representações que dá sentido a um objecto matemático, uma vez que cada representação é de diferente natureza, tem capacidade de representação limitada e descreve diferentes aspectos do objecto que representa (Duval, 2006). O NCTM (2000) reforça esta ideia, ao referir que são estes diferentes tipos de representações que "frequentemente iluminam diferentes aspectos de um conceito complexo ou relação" (p. 68) pois cada uma tem as suas características próprias, e as suas vantagens e limitações.

A Matemática é composta de conceitos que estão relacionados através de uma variedade de relações. Aprender um conceito usualmente engloba não apenas conhecer o seu significado mas também compreender as múltiplas relações que liga o conceito com outras ideias. Usar diferentes representações é como examinar o conceito através de uma variedade de lentes, cada uma das quais fornece uma perspectiva que torna o conceito mais rico e profundo (Tripathi, 2008). À medida que o número de perspectivas aumenta, desenvolvemos melhor compreensão do conceito. Tripathi (2008) considera que "uma representação matemática, frequentemente, ilumina apenas um aspecto de um conceito matemático (…). Um quadro holístico do conceito começa a emergir quando (…) observamos a ideia a partir de diferentes perspectivas" (p. 438).

Vários autores (Ainsworth, 2006; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Greeno & Hall, 1997; Lesh, Behr & Post, 1987a; Janvier, 1987) defendem que estas diferentes representações não devem ser consideradas alternativas nem independentes entre si e sublinham a importância de se estabelecerem conexões entre vários tipos de representações. É o que se pode observar, por exemplo, a propósito do modelo apresentado por Clement (2004):

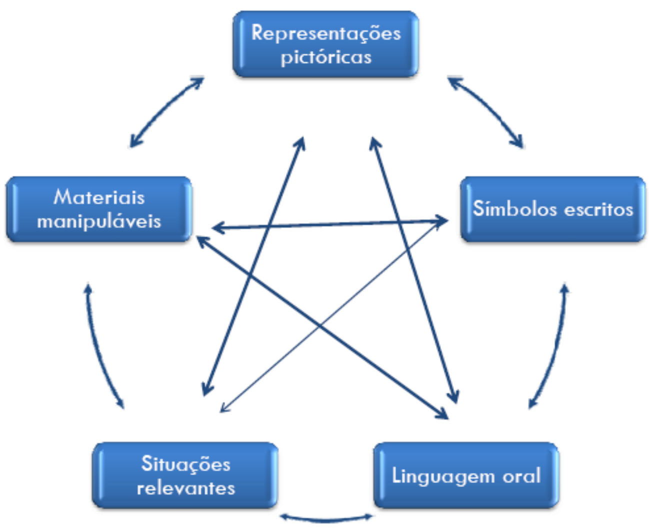


Figura 2.15 - Conexões entre representações (adaptado de Clement, 2004)

A tradução[2] é um termo que deriva da ideia de representações múltiplas e refere-se ao processo de passar de uma forma de representação para outra, por exemplo, passar de uma equação para um gráfico e vice-versa (Janvier, 1987). Assim, uma tradução envolve sempre duas formas de representação: a fonte (a representação inicial) e o alvo (a

[2] No original, *translation.*

representação final). Limitando os modos de representação a quatro (descrições verbais, tabelas, gráficos e fórmulas), Janvier (1987) apresenta uma tabela com os processos de tradução entre eles e as actividades que os permitem:

Quadro 2.5
Processos de tradução (Janvier, 1987, p. 29)

PARA / DE	DESCRIÇÕES VERBAIS	TABELAS	GRÁFICOS	FÓRMULAS
DESCRIÇÕES VERBAIS		Medir	Esboçar	Modelar
TABELAS	Ler		*Plotting*	Ajustar
GRÁFICOS	Interpretar	Ler		Ajuste de Curvas
FÓRMULAS	Reconhecer parâmetros	Calcular	Esboçar	

Os processos que o autor define, para preencher a tabela, não são necessariamente únicos pois dependem do contexto em que uma tradução particular é obtida. Além disso, embora as células da diagonal da tabela não estejam preenchidas, esses processos existem mas o autor chama-lhes transposição. Janvier (1987) acrescenta, ainda, algumas setas à tabela para salientar os modos alternativos de obter uma tradução. Por exemplo, essas setas indicam que a tradução tabela → fórmula é, frequentemente, realizada como tabela → gráfico → fórmula e vice-versa.

A capacidade de estabelecer ligações significativas entre diferentes representações e de traduzir de um modo de representação para outro é definida, em Kertil e Aydin (2009) como "fluência representacional". No entanto, para Zbiek, Heid, Blume e Dick (2007), o termo fluência representacional envolve mais do que a tradução entre diferentes modos de representação:

> Fluência representacional inclui a capacidade de traduzir entre representações, a capacidade para dar significado a uma entidade matemática a partir de diferentes representações dessa entidade e a capacidade para generalizar entre diferentes representações. (p. 1192)

No mesmo sentido, Sfard e Linchevski (1994) defendem que é a flexibilidade que determina a competência algébrica dos alunos e que esta flexibilidade é função de dois parâmetros: versatilidade e adaptabilidade. A versatilidade refere-se à colecção de ferramentas que um aluno tem disponível para resolver um problema e a capacidade para as usar (por exemplo, o aluno é capaz de representar e resolver problemas tanto simbólica como graficamente). A adaptabilidade refere-se à capacidade de seleccionar e usar as ferramentas mais adequadas ao trabalho a realizar (por exemplo, o aluno é capaz de manipular símbolos, no entanto escolhe raciocínio gráfico para resolver um problema particular porque o serve melhor). Para os autores, a análise destes dois parâmetros é fundamental para a avaliação da flexibilidade de um aluno na resolução de problemas. O NCTM (1989) também salienta os benefícios da versatilidade dos alunos e recomenda que estes devem ser capazes de "representar e analisar relações usando tabelas, regras verbais, equações e gráficos" e "traduzir entre representações tabelares, simbólicas e gráficas" (p. 154).

Assim, além da ênfase dada a cada um dos diversos tipos de sistemas representacionais, a capacidade de tradução entre a diversidade de registos de representações parece ser um dos desafios inerentes à compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos. A literatura indica que a capacidade de traduzir dentro e entre diferentes representações de conceitos matemáticos é essencial no desenvolvimento de competências matemáticas e de resolução de problemas de um indivíduo (Elia, Panaoura, Eracleous & Gagatsis, 2007; Even, 1998; Greeno & Hall, 1997; Hitt, 1998a; Janvier, 1987).

Representações múltiplas na aprendizagem da Matemática e na resolução de problemas

Tradicionalmente, o ensino da Matemática tem baseado o seu foco no desenvolvimento de experiência no uso de representações ou estratégias únicas, usualmente as preferidas pelos professores ou as que têm uma presença frequente nos manuais escolares (Elia et al., 2007; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Yerushalmy & Chazan, 2002). Deste modo, quando as situações problemáticas não são conformes com essas estratégias (representações), os alunos enfrentam dificuldades. A prática de expor os alunos a uma única representação de conceitos e relações matemáticas não os ajuda, necessariamente, a compreender esses conceitos. Como argumenta Niemi (1996), o facto dos alunos serem capazes de usar uma única representação em problemas envolvendo determinado conceito não significa que o tenham compreendido. Do mesmo modo, quando os alunos respondem correctamente a determinado tipo de problema matemático, da forma como aprendem a fazê-lo, não significa que tenham construído uma base de compreensão que conduza à aprendizagem de novos conceitos. Não podemos obter informação sobre a compreensão dos alunos "se olharmos apenas para a facilidade, ou mesmo a qualidade com que lidam com cada uma das representações em separado" (Hitt, 1998b, p. 95).

Neste contexto, os alunos têm que se familiarizar com uma diversidade de representações e devem ser capazes de as usar, de forma flexível, na resolução de problemas em várias áreas do conhecimento e, em particular na Matemática, como salientado nas normas da AMATYC (2006). De facto, o uso de diferentes representações depende da familiaridade dos alunos isoladamente com cada uma dessas representações. Primeiro, os alunos necessitam de compreender a forma da representação, como codifica a informação e como se relaciona com o domínio que representa. Depois, com o aumento da sua compreensão, tornam-se menos dependentes do tipo de representação e tornam-se mais capazes de moverem-se entre diferentes tipos de representações (Ainsworth, 2006). Quando interactuam com representações múltiplas, os alunos devem compreender também a relação entre as representações, mas alguns estudos têm mostrado que tendem a tratar as representações de forma isolada e encontrar dificuldades para integrar a informação vinda de mais de uma fonte. Assim, é fundamental que os professores promovam, nas salas de aula, o uso flexível de representações múltiplas. Desta forma, os alunos estarão expostos a diferentes representações dos conceitos matemáticos e como resultado, ganham capacidade para: (i) traduzir dentro e entre as diferentes representações; (ii) seleccionar as mais adequadas para a resolução de situações específicas; e (iii) usarem-nas como meio facilitador da sua compreensão matemática e capacidade de resolução de problemas (Hiebert & Carpenter, 1992; NCTM, 2000).

Existem muitas vantagens no uso de representações múltiplas, claramente identificadas pelos inúmeros trabalhos desenvolvidos nessa área. Alguns autores identificam o desenvolvimento de compreensão de conceitos e ideias matemáticas como uma vantagem do uso de representações múltiplas. Por exemplo, para Lesh, Post e Behr (1987b), um aluno que compreende uma ideia é aquele que reconhece a ideia numa variedade de diferentes representações e a manipula de forma flexível entre as representações dadas. De modo semelhante, Dufour-Janvier et al. (1987) defendem que o uso de representações múltiplas ajuda os alunos a rejeitar uma representação a favor de outra (com razões), a passar de uma representação para outra sabendo as limitações e eficácia de cada uma e a seleccionar representações apropriadas para resolver problemas. Segundo Even (1998), a capacidade para identificar e representar o mesmo conceito em diferentes representações e a flexibilidade em mover-se de uma representação para outra são cruciais na aprendizagem da Matemática pois permitem aos alunos desenvolver uma profunda compreensão dos conceitos e reforçar a capacidade de resolver problemas. No seu estudo, a autora analisa a flexibilidade de alunos universitários na passagem de uma representação de uma função para outra e identifica alguns factores críticos que podem influenciar essa flexibilidade: (i) o tipo de abordagem às funções (a facilidade dos alunos em usar uma análise pontual ou global); (ii) o contexto da apresentação do problema (por exemplo, o tipo e a natureza das funções que são apresentadas); e (iii) a qualidade do conhecimento que está subjacente às noções de função com que lidam.

Hitt (1998a) desenvolve um estudo para avaliar, através de um questionário realizado a alunos universitários de um curso de educação matemática, a sua compreensão das diferentes representações das funções, a sua capacidade para identificar diferentes representações e para traduzir dentro e entre diferentes representações durante a resolução de problemas. O questionário avalia diferentes aspectos relacionados com o conceito de função, incluindo as representações mais comuns no estudo de funções (gráfica, tabelar e simbólica). Os resultados indicam que as concepções erradas dos participantes sobre o conceito de função são devidas, em parte, ao seu conhecimento limitado das diferentes representações do conceito de função e as ligações entre elas. Mais recentemente, Elia et al. (2007) também exploram as concepções dos alunos do ensino secundário sobre funções e a sua relação com a capacidade para realizar tarefas envolvendo diferentes formas de representação desse conceito. Os resultados revelam as dificuldades dos alunos em fornecer uma definição adequada para o conceito de função e na resolução de problemas envolvendo conversões entre diversos modos de representação do conceito. Os autores consideram que as dificuldades dos alunos em lidar com diferentes representações e a falta de coordenação entre representações podem estar relacionadas com os métodos de ensino que advogam o uso de uma única representação.

A existência de uma relação próxima entre a capacidade de resolução de problemas e a capacidade de tradução entre diferentes representações de uma ideia matemática é evidenciada também por Gagatsis e Shiakalli (2004). Os autores investigam a capacidade de tradução de alunos universitários, no que diz respeito ao conceito de função. O estudo foca-se na relação entre o sucesso em resolver tarefas de tradução directa e o sucesso em resolver problemas articulando diferentes representações do conceito de função. Além disso, examina a relação entre o desempenho dos alunos e a natureza da representação incluída nas tarefas de tradução. Os resultados mostram que a capacidade de tradução entre representações está associada ao sucesso na resolução de problemas. Mostram, ainda, que as percentagens de sucesso nas tarefas de tradução directa são mais baixas quando uma representação gráfica está envolvida na tarefa de tradução. Os autores atribuem este resultado à natureza holística das representações gráficas e ao modo como o conceito de função é ensinado nas escolas secundárias.

A preferência dos alunos por representações particulares, os factores que a determinam e ainda como é que essa preferência influencia a sua compreensão dos conceitos matemáticos e a resolução de problemas, são aspectos investigados em vários estudos. Por exemplo, Cai (2000) desenvolve um estudo com alunos (americanos e chineses) do 6.º ano, com tarefas que envolvem o algoritmo da média aritmética, para determinar se o seu sucesso durante a resolução de problemas é dependente do tipo de representações que usam. O autor observa que a maioria dos alunos chineses usa representações algébricas (simbólicas) na resolução das tarefas dadas enquanto os americanos, com uma taxa de insucesso superior, preferem as representações verbais ou pictóricas. Verifica ainda que os alunos que usam representações algébricas na resolução das tarefas dadas têm um desempenho significativamente melhor do que os que usam representações pictóricas ou verbais. Deste modo, o investigador atribui este sucesso à competência na selecção e uso de representações apropriadas para resolver as tarefas dadas e conclui que a capacidade para seleccionar uma representação apropriada para resolver um problema é essencial ao sucesso durante a sua resolução.

O estudo de Knuth (2000) analisa a compreensão dos alunos sobre funções, baseado na ligação que fazem entre representações algébricas e gráficas do conceito. Os participantes são alunos de uma escola secundária a quem é pedido para resolver dez problemas sobre funções (cada problema é apresentado em dois formatos: uma representação algébrica e uma representação gráfica). Os alunos devem resolver cada problema usando uma das duas representações e depois devem arranjar um método alternativo de solução (usando a outra representação). Os resultados indicam que os alunos confiam mais nas representações algébricas e que poucos foram capazes de dar um método alternativo para a solução dos problemas. Para a maioria dos alunos, o gráfico parece ser desnecessário ou mesmo irrelevante para encontrar soluções. Assim, Knuth atribui as dificuldades dos alunos à sua (grande) confiança nas representações algébricas e à falta de ligação entre equações e gráficos de funções e advoga que para um aluno desenvolver uma compreensão robusta da noção de função não chega conhecer uma representação para usar durante a resolução de problemas, é necessário, também, ser capaz de se mover de forma flexível entre diferentes representações de funções.

Tom e Russell (2001) também investigam se a escolha feita pelos alunos das representações que usam na resolução de problemas, depende da sua complexidade. Durante três anos, os alunos do 6.º ano que participam no estudo são solicitados a resolverem 20 problemas matemáticos (etiquetados como fáceis e difíceis) e a indicarem os métodos usam para resolver cada um desses problemas. As respostas são classificadas como visuais, se o método de solução usado envolve uma representação pictórica ou gráfica ou como não visuais, caso contrário (por exemplo, representação simbólica). Os resultados do estudo indicam que os alunos preferem usar métodos visuais para completarem os problemas difíceis e que os métodos não visuais são usados em situações problemáticas de menor dificuldade, indiciando uma relação entre a dificuldade da tarefa e a escolha da representação. Os autores defendem que os alunos devem ser expostos a diferentes representações, tanto visuais como não visuais, dos conceitos e relações matemáticas.

Já ao nível universitário, Ozgun-Koca (1998) realiza uma experiência de ensino, onde expõe os alunos a diferentes tipos de representações (gráficas, simbólicas e tabelas), para investigar as atitudes, as estratégias e a sua preferência na escolha de um tipo de representação para resolver problemas matemáticos. Os participantes são observados e entrevistados enquanto trabalham em actividades para avaliar a sua preferência e competência no uso de diferentes representações enfatizadas nas aulas. Os resultados indicam que, apesar dos alunos terem conhecimento das diferentes representações que podem usar na resolução dos problemas, a maioria considera mais fácil focar-se numa única representação do que lidar com várias. Além disso, o conforto dos alunos com um tipo de representação particular (75% usa representações algébricas, 19% favorece o uso de tabelas e apenas 6% utiliza gráficos) influencia a sua escolha por essa representação durante as situações problemáticas. O autor atribui os resultados da investigação ao conhecimento prévio e à experiência com as diferentes representações, notando que os alunos com experiências positivas com uma representação particular têm maior probabilidade de escolher essa representação durante a resolução de problemas. Ozgun-Koca (1998) argumenta que para os alunos ganharem experiência e competência no uso de diferentes representações de conceitos e para serem capazes de seleccionar a representação que é mais significativa na compreensão e resolução de problemas, precisam de experimentar um ensino que forneça um ambiente com diferentes representações em vez de favorecer uma única representação.

A preferência pela representação simbólica é visível também em Piez e Voxman (1997). Estes autores, através de entrevistas, observam que os alunos que optam por usar representações simbólicas na resolução dos problemas o fazem porque acham que é mais fácil para compreender e menos consumidora de tempo. Estes alunos não gostam de tabelas e gráficos porque despendem muito tempo e são demasiado complicadas. Os que usam representações gráficas na resolução dos problemas baseiam a sua escolha no facto destas representações os ajudarem a compreender e a ver o que estão a fazer durante o processo de resolução de problemas. Estes alunos reclamam que as outras representações não lhes dão essa facilidade. O aluno que usa as duas representações defende que usa uma representação para resolver o problema e outra para verificar se a sua solução faz sentido no contexto do problema.

Nos cursos universitários, a actividade de construção de uma prova também pode ser vista como uma tarefa de resolução de problemas no qual o aluno é solicitado a encontrar uma justificação lógica que demonstra a veracidade de uma dada conjectura. Segundo Weber (2005), uma abordagem que os alunos usam para construir uma prova é considerar representações informais ou intuitivas de conceitos matemáticos relevantes para guiar o trabalho formal que produzem. As provas elaboradas deste modo são chamadas provas semânticas (Weber & Alcock, 2004), provas baseadas em ideias chave (Raman, 2003) ou provas que seguem um pensamento intuitivo (Vinner, 1991). A produção de uma prova usando representações, é um processo em dois passos (excepto nos casos onde a representação é "institucionalizada", em que estes passos podem ser dados simultaneamente). Depois de uma representação (por exemplo, um gráfico ou diagrama) ser usada pelo aluno para tentar compreender porque é que uma afirmação é verdadeira, o segundo passo é escrever (ou traduzir) o seu argumento intuitivo em linguagem formal para produzir a prova (Weber, 2004). A prova semântica pode, assim, fornecer ao aluno a oportunidade para desenvolver ou refinar representações informais de conceitos matemáticos e usar o seu raciocínio com essas representações para ganhar diferentes níveis de convicção e compreensão sobre as razões dos teoremas matemáticos serem verdadeiros. No seu estudo, Weber (2004) analisa as tentativas de produção de provas de alunos universitários e conclui que eles raramente tentam construir provas semânticas. O autor atribui este resultado ao facto dos alunos estarem muito expostos à "linguagem de prova estrita" que os torna resistentes ao uso de representações, olhando para elas como não sendo legítimas ferramentas matemáticas, tal como já observado noutros estudos (Eisenberg & Dreyfus, 1991; Lavy, 2006).

Estes resultados parecem indicar que a capacidade de tradução deve ser considerada como um factor importante na resolução de problemas e suportam a afirmação de diversos autores (Brenner, Herman, Ho & Zimmermann, 1999; Goldin, 2002; Greeno & Hall, 1997; Janvier, 1987; Lesh et al., 1987b; Schultz & Waters, 2000) que os bons resolvedores de problemas são suficientemente flexíveis no uso de uma variedade de diferentes representações.

As representações e a calculadora gráfica

Do ponto de vista do NCTM (2000), o uso de tecnologia é essencial no ensino e aprendizagem da Matemática pois pode influenciar a Matemática que é ensinada e melhorar a aprendizagem dos alunos. Este documento enfatiza as competências computacionais e encoraja o uso de calculadoras e computadores para realizar cálculos rotineiros, permitindo que o foco do ensino seja a compreensão conceptual. O uso de calculadoras gráficas também é especificamente recomendado pelo NCTM (1989) que sugere que devem ser usadas para facilitar a compreensão dos alunos através de uma abordagem representacional múltipla às funções. De facto, de um ponto de vista construtivista, a calculadora gráfica é um poderoso instrumento para a aprendizagem das funções pois permite efectuar, com facilidade, a conversão entre várias representações e ajuda os alunos a construir conexões conceptuais.

Delos Santos (2006) acredita que o uso de ferramentas, oferecendo novas formas de obter resultados, tem potencial para modificar as actividades dos alunos fornecendo-lhes modos alternativos de operar e pensar sobre um objecto de estudo. A calculadora gráfica é um caso especial de uma ferramenta definida como "tecnologia cognitiva". No caso da aprendizagem da Matemática, o uso de tecnologias cognitivas pode influenciar o pensamento matemático e pode servir dois propósitos: cognitivos ou comunicativos (Delos Santos, 2006). No sentido cognitivo, estas tecnologias têm o potencial de funcionar tanto como amplificadoras ou como reorganizadoras do pensamento. Como amplificadoras, as tecnologias cognitivas aumentam o número de tarefas que podem ser realizadas num tempo mínimo pois têm o potencial para libertar os alunos das operações e procedimentos matemáticos que requerem papel e lápis. Isto pode conduzi-los a desenvolver novas capacidades: uma mudança das actividades entediantes de implementação de procedimentos para as actividades que envolvem experimentação, reflexão e abstracção. O uso de tecnologias cognitivas, como amplificadoras, também permite que os alunos realizem processos que podem não ser acessíveis de outra forma. Por outro lado, como reorganizadoras, as tecnologias cognitivas têm a capacidade para apresentar objectos em formas múltiplas, introduzindo novas formas de ver e pensar (Ruthven, 1996). Estas experiências multi-representacionais que a calculadora gráfica permite, tem introduzido novas formas de aprendizagem e compreensão (Balacheff & Kaput, 1996). Por exemplo, os alunos têm desenvolvido competências de visualização espacial com o uso de abordagem gráfica ao ensino de funções, para além da abordagem simbólico-algébrica (Penglase & Arnold, 1996). Os alunos que têm sido expostos, frequentemente, tanto a representações gráficas como simbólicas de funções têm melhorado as suas competências simbólicas (Ruthven, 1990). Isto é, os alunos têm desenvolvido fluência na tradução de representações gráficas para simbólicas de funções.

Sempre que o desenho de gráficos é apropriado ou a verificação de resultados é necessária, a presença da calculadora pode fornecer-lhes opções para utilizarem tanto uma abordagem gráfica como uma analítica na resolução de problemas. Por outro lado, a capacidade das calculadoras apresentarem objectos matemáticos, como por exemplo, as funções, em representações múltiplas (simbólica, gráfica e/ou numérica), permite que os alunos adquiram a capacidade de fazer conexões entre duas ou mais representações (Core-Plus Mathematics Project, 2004). Embora o desenvolvimento de mais do que uma representação para um objecto matemático possa, habitualmente, tomar bastante tempo, o uso efectivo de calculadoras gráficas permite um rápido e fácil desenvolvimento de representações e a tradução entre elas (Kastberg & Leatham, 2005). Para Wilson e Krapfl (1994), um contexto de aprendizagem em que a calculadora gráfica esteja presente fornece, aos alunos, a oportunidade para comparar e fazer conexões entre representações. Estas, por sua vez, contribuem para que eles experimentem novas formas de aprendizagem. Nos trabalhos de Ruthven (1990) e Berger (1998) é especificamente referido que os alunos expostos a estes contextos têm melhorado a sua capacidade para construir conexões entre representações algébricas e gráficas de funções.

Além disso, os contextos multi-representacionais fornecidos pela calculadora gráfica, têm servido como auxiliar para os professores modificarem ou criarem problemas que são relevantes para as experiências dos alunos. Com este tipo de problemas, os alunos são encorajados a investigar situações usando perspectivas gráficas e numéricas enquanto as relacionam com as suas formas simbólicas (Slavit, 1996). Para Delos Santos (2006), a capacidade da calculadora para fornecer *feedback* imediato permite a introdução de uma abordagem investigativa à resolução de problemas. Esta característica da calculadora facilita uma interacção espontânea entre o aluno e o objecto de investigação. Drijvers e Doorman (1996) suportam esta afirmação e acrescentam que a interacção entre a calculadora e o aluno encoraja-o, alternadamente, a experimentar e a reflectir com base nos resultados do que vai fazendo. Esta alternância cognitiva entre a experimentação e a reflexão influencia o pensamento conceptual e reflexivo.

Um número crescente de estudos tem focado a atenção no papel das calculadoras gráficas no desenvolvimento do raciocínio de ordem superior dos alunos e da capacidade de resolução de problemas (Ali, Seth, Zainuddin, Kassim, Sulaiman & Kamaru, 2002; Artigue, 1991; Dubinsky & Tall, 1991; Eisenberg, 1991; Girard, 2001). Ali et al. (2002) dão particular atenção à exploração do potencial papel das calculadoras gráficas na aprendizagem, quando são usados métodos pedagógicos inovadores baseados numa abordagem mais activa e centrada no aluno. As calculadoras gráficas podem desenhar gráficos, visualizar superfícies 3D, simplificar expressões, calcular derivadas e integrais (simbólica ou numericamente), realizar operações com matrizes e resolver equações diferenciais. Além disso, a calculadora pode, igualmente, manusear dados, calcular medidas estatísticas, gerar uma variedade de gráficos e testes estatísticos e realizar análise de regressão. Deste modo, as calculadoras disponibilizam aos alunos uma variedade de técnicas para resolverem problemas e automatizam a maioria das capacidades de cálculo ensinadas em Matemática, libertando-os para trabalhar a um nível cognitivo superior. Os autores referem, ainda, que a calculadora serve para facilitar inquirições, explorações e actividades de resolução de problemas e é usada como:

(i) Uma ferramenta para a manipulação simbólica ou apresentação gráfica de funções matemáticas e equações;

(ii) Uma forma de facilitar a colecção, exame e análise de dados e sua manipulação;

(iii) Uma ferramenta para fomentar a aprendizagem colaborativa e ensinar os alunos a trabalhar em equipa;

(iv) Uma ferramenta para ajudar a resolução de problemas que permite que o aluno se concentre nos aspectos do problema e interpretação em vez dos aspectos computacionais; e

(v) Uma ferramenta para descobrir, visualizar ou investigar teorias matemáticas.

Um outro aspecto importante a ser considerado no ensino de Matemática consiste na análise do significado dos dados obtidos. Muitas vezes o aluno resolve o problema correctamente, mas não sabe interpretar os resultados. Ruthven (1997) analisa a resolução de problemas por alunos ingleses do último ano da educação primária que fazem parte de escolas que seguem a recomendação do currículo nacional inglês que incentiva o uso da calculadora na sala de aula. Observa que os mais altos índices de sucesso são nos problemas em que os alunos usam a calculadora, mas nenhum dos alunos consegue interpretar o resultado obtido correctamente. A dificuldade na interpretação dos resultados obtidos não é exclusiva nos problemas resolvidos com a calculadora, mas existe também nas outras formas de resolução dos problemas (cálculo escrito, por exemplo). Os dados obtidos mostram que o trabalho envolvendo as ferramentas de resolução de problemas, incluindo a calculadora, deve ter também uma preocupação com a interpretação dos resultados obtidos e não incidir apenas na questão do uso da ferramenta e os contextos dessa utilização. Ruthven (1990) também investiga o efeito da calculadora na capacidade dos alunos do ensino secundário superior em traduzir da forma algébrica e em interpretar gráficos em situações contextuais. Os resultados mostram que aqueles que usam calculadoras gráficas têm um desempenho superior aos que não têm acesso a essa ferramenta nas tarefas de manipulação simbólica. No entanto, não existe diferenças significativas entre os resultados dos alunos nas tarefas em que são solicitados a fazer interpretações a partir de representações gráficas de situações contextuais. O autor sugere que esta falta de distinção resulta da falta de preparação dos alunos em fazerem interpretações a partir de gráficos.

De acordo com as investigações apresentadas, o uso de calculadoras gráficas no ensino e aprendizagem da Matemática pode ajudar os alunos a melhorar o seu conhecimento e competência em alguns domínios, como o desenvolvimento de conceitos ou a resolução de problemas. O uso de calculadora gráfica na educação matemática traz, também, novos métodos de trabalho, especialmente a possibilidade de exploração e modelação de problemas matemáticos, representações múltiplas de problemas matemáticos (representação numérica, algébrica, gráfica, algorítmica) e suporte gráfico dos resultados obtidos por procedimentos algébricos. É apropriado usar as calculadoras no processo de desenvolvimento de conceitos (através da sua visualização), para a simplificação de soluções de tarefas matemáticas e para a resolução de problemas (Robova, 2002). No entanto, embora se defenda que o uso de calculadoras gráficas tem mudado a forma da Matemática ser ensinada pelos professores e ser aprendida pelos alunos (Ruthven, 1996), alguns trabalhos revelam que o uso das calculadoras é, algumas vezes, limitado à execução ou verificação de cálculos, com pouco reconhecimento do seu papel em promover conhecimento e compreensão. Como Girard (2001) sugere, poucos estudos até agora examinam como a calculadora está a ser usada pelos alunos (isto é, como uma ferramenta para propósitos de exploração ou confirmatórios e/ou para, representações gráficas e numéricas).

Num desses estudos, Doerr e Zangor (2000) categorizam os modos de utilização da calculadora gráfica pelos alunos: (i) como ferramenta computacional, caso em que a calculadora é usada pelos alunos, rotineiramente, para calcular o valor de expressões numéricas; (ii) como ferramenta transformacional, a categoria mais significativa no estudo, pois permite transformar as tarefas entediantes em tarefas interpretativas; (iii) como ferramenta de recolha e análise de dados, sendo utilizada para recolher, guardar e comparar dados, caso em que os alunos se empenham na tarefa e têm que tomar decisões, através de um processo de conjectura, refinamento e negociação; (iv) como ferramenta de visualização, sendo utilizada de modos diferentes (para desenvolver parâmetros visuais combinando estratégias para encontrar equações que se ajustassem a um conjunto de dados, para determinar imagens adequadas do gráfico e determinar a natureza da estrutura subjacente à função, para conectar a representação visual ao fenómeno físico e para resolver equações e inequações); e (v) como ferramenta de confirmação, sendo a calculadora usada para verificar as conjecturas formuladas pelos alunos, nas tarefas de investigação. Este processo é seguido pela rejeição e reformulação da conjectura, pela tentativa de prova ou pela sua aceitação. Semião (2007) adopta esta categorização para estudar a utilização da calculadora gráfica na aula de Matemática, com alunos do 12.º ano. Os resultados do seu estudo revelam que os alunos usam a calculadora gráfica apenas como ferramenta computacional e de visualização. A autora atribui este facto ao tipo de cultura instituída na sala de aula.

Resumindo, ao abordar o tema das representações matemáticas é uma tarefa complexa e desafiante, a avaliar pela longa história de tentativas, com vários graus de sucesso, de dar sentido às muitas formas que a actividade representacional pode tomar. Desde logo, a noção de representação pode assumir diferentes interpretações, consoante o domínio que se considere. Alguns autores usam este termo para designar uma representação mental, enquanto outros a utilizam para dar significado a uma representação material ou externa. Exemplos de representações externas são as figuras, os diagramas, os textos, os gráficos, as tabelas e os símbolos. As representações internas, por outro lado, são o conhecimento e as estruturas na memória humana, como os modelos mentais e os esquemas. No entanto, parece ser a relação entre as representações externas e as internas que os autores destacam e referem que as representações são observáveis externamente como ocorrências internas na mente dos indivíduos. Deste modo, o estudo das representações construídas pelos alunos podem dar-nos indicação da sua compreensão e ajudar a delinear a sua aprendizagem. Tendo em conta o propósito do estudo, o foco desta revisão de literatura é nas representações externas e o papel que desempenham no raciocínio, na compreensão de ideias matemáticas e, sobretudo, na capacidade de resolução de problemas dos alunos.

Existem muitos esquemas propostos para categorizar as representações em diferentes tipos. Estas taxonomias, mais ou menos refinadas, têm sido criadas tendo em conta os domínios científicos onde surgem, os atributos das próprias representações ou com base na tarefa para a qual são criadas e, embora haja alguma sobreposição entre elas, nenhuma classificação é universalmente aceite. Alguns autores destacam determinados tipos de representações, como a linguagem natural e a simbólica e as formas visuais de representação (onde incluem os gráficos, as tabelas, as figuras, etc.), pela frequência com que surgem em contextos educacionais e pelas funções que desempenham nesses ambientes.

Possibilitar que os alunos contactem e usem representações variadas, incentivá-los a criarem as suas próprias representações para resolver um problema matemático e ajudá-los a estabelecer conexões entre diferentes representações parece favorecer a criação de condições para que aprofundem a sua compreensão de ideias matemáticas e suas relações. Grande parte dos estudos sobre representações revela a existência de uma relação próxima entre a capacidade de resolução de problemas e a capacidade de tradução entre diferentes representações de uma ideia matemática. De facto, o uso de representações múltiplas, que implicam combinar duas ou mais formas representacionais, permite aos alunos beneficiar das propriedades de cada uma das representações e conduzi-los a uma compreensão mais profunda da Matemática.

Deste modo, existem muitas formas de representar a informação em ambientes educacionais: descrições textuais, fórmulas algébricas, fotografias, desenhos, tabelas, gráficos e muitas outras. A importância (e a necessidade do uso) das representações no processo de ensino-aprendizagem da Matemática está devidamente documentada na literatura. Vários autores começam por enfatizar que a forma como a informação é representada é extremamente importante para a aprendizagem. Mais tarde, são os efeitos das diferentes representações que são estudados sistematicamente. Hoje em dia, depois de décadas de intensiva investigação e com o desenvolvimento das tecnologias, tem-se ganho novos conhecimentos e, no entanto, a compreensão da interacção entre as representações e a aprendizagem está apenas a começar a emergir.

Capítulo 3

Metodologia de Investigação

Neste capítulo descrevo e justifico as opções metodológicas desta investigação, salientando as principais características e potencialidades da abordagem qualitativa enquanto metodologia de investigação. Apresento também o contexto do estudo e descreve as características dos alunos que nele participam. Finalmente, refiro os procedimentos do estudo, caracterizando as técnicas utilizadas na recolha e análise dos dados, nomeadamente a observação de aulas, a realização das entrevistas e a recolha de documentos produzidos pelos alunos.

3.1. Opções metodológicas

Numa investigação, a escolha da metodologia a usar está relacionada com os seus objectivos e, em particular, com as questões a que se pretende dar resposta. Com este estudo pretendo compreender os processos de raciocínio dos estudantes do ensino superior quando se envolvem na realização de actividades de investigação. Constitui ainda uma preocupação relevante compreender qual a potencial mais-valia, em termos de aprendizagem, de tais actividades.

Abordagem qualitativa e interpretativa. Sendo o foco nos aspectos qualitativos da construção de conhecimento matemático dos estudantes, as questões de investigação requerem uma fonte natural de dados, obtida através de um contexto que possa ser observado 'em acção', de forma a permitir uma interpretação do fenómeno essencialmente descritiva e fundamentada em dados empíricos. Estas características, e os objectivos que presidem ao estudo, determinam a escolha de uma metodologia de investigação qualitativa, integrando uma vertente de experiência de ensino. Opto ainda por um paradigma interpretativo de investigação uma vez que a minha preocupação se centra sobretudo na interpretação, compreensão e explicação dos acontecimentos do ponto de vista dos intervenientes, tendo em conta a sua singularidade e os contextos de interacção social.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa apresenta um conjunto de características intrínsecas: (i) a fonte directa dos dados é o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal tanto na recolha como na análise dos dados; (ii) os dados recolhidos são na sua essência descritivos, sendo ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas e o seu tratamento estatístico é muito complexo ou impossível; (iii) o maior interesse do investigador está nos processos e não nos resultados; (iv) a análise dos dados é sobretudo indutiva, não tendo o investigador como objectivo a confirmação de hipóteses colocadas previamente, mas antes a construção de abstracções com base na análise de dados particulares; e (v) a preocupação central do investigador é com as perspectivas dos participantes.

Estudos de caso. Existem tipos diferentes de estudos qualitativos que, embora com características comuns, requerem métodos e procedimentos específicos. Em educação, e, em particular, na educação matemática, os estudos de caso têm-se tornado cada vez mais comuns. Segundo Ponte (2006), o estudo de caso é um *design* de investigação de forte cunho descritivo, especialmente adequada quando se pretende estudar uma "situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico" (p. 106). Também Yin (2003) elege esta metodologia quando as questões do 'como' e 'porquê' são fundamentais, quando o investigador tem pouco controlo sobre os acontecimentos e quando o foco do estudo é um fenómeno que se passa em contexto real. Assim, de modo a adquirir uma percepção mais consistente do tipo de raciocínios, interacções e processos utilizados pelos alunos, opto por recorrer a estudos de caso. Penso que esta abordagem pode criar condições para uma descrição aprofundada dos raciocínios usados pelos alunos, permitindo acompanhar em detalhe a sua evolução, o que pode ser importante para a respectiva compreensão e interpretação face aos objectivos da investigação.

Goetz e LeCompte (1984) defendem, ainda, que o investigador de um estudo de caso tem de ir ao encontro dos seus participantes e entrar no seu ambiente natural, onde precisa de permanecer durante tempo razoável em interacção com eles. O facto de o investigador passar uma quantidade de tempo considerável no campo, leva a um confronto constante das suas opiniões e preconceitos com os dos sujeitos. É no trabalho de campo que o investigador tenta compreender acontecimentos, de estrutura mais complexa, que de imediato não podem ser apreendidos (Bogdan & Biklen, 1994). Estes argumentos mostram que a metodologia de estudo de caso representa, para o investigador, um elevado nível de exigência. Neste estudo, a introdução no campo e o acesso aos participantes são processos bastante facilitados devido às minhas funções de docente e à existência de um conhecimento mútuo. Isto torna a minha permanência durante um período longo de tempo em interacção com os participantes igualmente fácil.

Experiência de ensino. A realização de uma experiência de ensino é, em muitos aspectos, ideal para conduzir investigação sobre o potencial de uma inovação educacional proposta numa perspectiva de inquirição naturalista, especialmente quando essa inovação está longe das práticas de ensino vigentes (Borasi, 1992). O termo “experiência de ensino” designa assim a realização de algum novo modo de ensino, conduzido possivelmente com um pequeno número de estudantes e envolvendo uma monitorização cuidada de forma a captar o processo de aprendizagem ‘em acção’ e as mudanças que têm lugar como resultado desse processo.

Shulman (1986a) indica que uma experiência de ensino, enquanto abordagem metodológica, privilegia a interpretação na procura de significados e visa descrever e interpretar os processos de desenvolvimento dos fenómenos sobre os quais se debruça, induzidos por meio de intervenções planificadas. Uma tal experiência pode ser utilizada na formulação de explicações do comportamento matemático dos alunos, com o objectivo “captar os processos no seu desenvolvimento e determinar como é que o ensino pode influenciar de maneira optimizada esses processos” (Kantowski, 1978, p. 45). Desta forma, as suas principais características são a interacção por períodos de tempo mais ou menos longos entre os alunos e os investigadores, o estudo dos processos de passagem dinâmica de um estado de conhecimento para o outro e a natureza qualitativa dos dados (Cobb & Steffe, 1983; Kantowski, 1978).

O meu trabalho de investigação anterior (Henriques, 2006) tem como base a concretização de uma proposta de ensino inovadora, baseada na realização de actividades de investigação na sala de aula. Os seus resultados confirmam que a organização das aulas dedicadas à realização destas actividades e a estruturação das tarefas favorece a exteriorização das ideias dos alunos, a explicitação dos seus raciocínios e a discussão de estratégias e resultados. Assim, neste estudo, opto por utilizar também uma experiência de ensino baseada em actividades de investigação, de modo a facilitar o acesso aos processos cognitivos usados pelos alunos enquanto resolvem as tarefas propostas.

Critérios de qualidade. Na investigação qualitativa, o investigador constitui o principal instrumento de recolha de dados, o que levanta questões quanto à validade e fiabilidade do estudo. Estas questões sobre a credibilidade de um estudo são abordadas por diversos autores (Cohen & Manion, 1994; Goetz & LeCompte, 1984; Merriam, 1988; Yin, 2003). A validade levanta o problema de saber se o investigador observa realmente aquilo que julga estar a observar. Os dados são, em grande parte, um produto da compreensão que o investigador tem sobre a situação e que pode ser influenciada pelos seus preconceitos e atitudes e não traduzir o que pode ser notado por muitos outros observadores. A preocupação principal dos investigadores qualitativos é certificarem-se que estão a apreender as diferentes perspectivas de forma adequada e que os seus dados correspondam àquilo que se pretende representar, de modo verdadeiro e autêntico. Para Yin (2003), isto arrasta a necessidade de múltiplas fontes de evidência e a adopção de estratégias particulares para recolha e análise de dados.

Ponte (2006) salienta a necessidade de definir critérios de qualidade para os estudos de caso, que reflictam as diferenças que existem entre os objectivos deste *design* e os propósitos prosseguidos por outros tipos de investigação. A inclusão do contexto como uma parte importante do estudo pode criar problemas particulares, dado o elevado número de factores relevantes presentes. A presença do investigador no campo pode introduzir alterações comportamentais nos sujeitos a estudar e, deste modo, enviesar os dados. A minimização deste 'efeito do observador' pode ser feita através de uma interacção 'natural' com os sujeitos, proporcionando situações em que a sua presença não provoque intrusões nem altere de forma significativa a acção que decorreria na sua ausência.

De forma a ultrapassar estas limitações e no que concerne à credibilidade, utilizo as técnicas recomendadas pela generalidade dos autores: observação persistente e prolongada e triangulação dos dados. A técnica da triangulação consiste em utilizar os diferentes métodos de recolha de dados e proceder ao cruzamento dos dados assim obtidos com o objectivo de verificar a sua consistência e coerência (Denzin & Lincoln, 1994). Quanto às conclusões apresentadas, estas são lidas e reconhecidas pelos próprios participantes, de forma a poder proporcionar ao investigador a segurança de que os registos são rigorosos e reflectem de forma clara os significados que os sujeitos lhe atribuem, aumentando o grau de confiança na verdade dos resultados. Desta forma, também os participantes ajudam a triangular as observações e as interpretações do investigador (Stake, 2007).

Uma questão que pode ser levantada na perspectiva interpretativa é a da generalização. A impossibilidade de generalização dos resultados, entendida como a extensão a outros contextos ou a sujeitos diferentes as conclusões retiradas de um estudo de carácter particular, é uma das objecções frequentemente colocadas à utilização dos estudos de caso. Ponte (2006) refere que, no campo das ciências sociais e, nomeadamente, em educação, a complexidade das situações educativas e a multiplicidade de factores envolvidos (actores humanos, significados, intenções) obsta a que a formulação de "leis gerais" e "generalizações verificáveis" fossem facilmente resolvidas. Por isso, não constitui objectivo deste trabalho a generalização das conclusões dele retiradas a outros casos, mas sim produzir conhecimento sobre casos particulares, que possa ser potenciador de novas hipóteses de trabalho relativamente ao ensino e aprendizagem da Matemática a nível superior. Como refere Ponte (2006), nestas situações a pertinência é realizar investigações com o objectivo de acrescentar novos elementos que enriqueçam o nosso conhecimento colectivo acerca desses problemas e fenómenos.

O papel da investigadora. Tendo em conta que se pretende descrever de um modo compreensivo e exaustivo um fenómeno, o meu papel de observadora participante é muito importante em todo o processo pois só assim é possível uma recolha de dados essenciais, nomeadamente os registos de todas as situações observadas, da turma e, em particular dos casos que fazem parte deste estudo. No entanto, não é fácil gerir este duplo papel de professora e investigadora quando se trata de combinar a participação e a observação de tal forma que seja possível interpretar a situação como alguém que faz parte dela e de a descrever como alguém que está fora. A questão que se coloca prende-se com as diferenças a estabelecer entre os trabalhos do investigador e do professor, quando se trata de um contexto educativo, como neste estudo. Enquanto investigadora, a minha preocupação principal é observar e conduzir a investigação, recolhendo dados com grande detalhe, tentando compreender e interpretar a forma como os alunos raciocinam. Enquanto professora, tento focar-me nas aulas, sem perder a perspectiva geral da turma e do comportamento de todos os alunos durante a realização das tarefas propostas, desempenhando um papel de orientadora das tarefas e questionando os alunos sobre as descobertas que vão realizando. Esta é uma situação ambígua, difícil de sustentar e muitas vezes geradora de ansiedade para o investigador, na medida em que deseja participar no contexto em estudo e, ao mesmo tempo, manter-se suficientemente desligado para observar e analisar (Matos & Carreira, 1994).

Apesar disso, o meu duplo papel de professora e investigadora permite uma observação persistente e um envolvimento prolongado com os participantes, reflectindo-se na informalidade das conversas e dos modos de estar e ajudando a prossecução dos objectivos da investigação. Bogdan e Biklen (1994) defendem que o desempenho simultâneo destes papéis inclui diversas potencialidades:

> Os professores, ao agirem como investigadores, não só desempenham os seus deveres mas também se observam a si próprios, dão um passo atrás e distanciam-se dos conflitos imediatos, tornam-se capazes de ganhar uma visão mais ampla do que se está a passar. (p. 286)

Ao procurar compreender o contributo da experiência de ensino que suporta este estudo, investigo também a minha própria prática enquanto docente. Existindo uma identidade entre a investigadora e a professora que orienta o trabalho dos alunos, pode considerar-se que se trata, também, de um estudo sobre a minha prática profissional, com as dificuldades específicas que isso comporta.

3.2. Estudo exploratório

Objectivos

O estudo exploratório pretende servir de ponte entre a conceptualização teórica da investigação e a realização do estudo principal, contribuindo substancialmente para a formação das suas principais características. Tem dois objectivos distintos, mas ambos concorrentes para um bom desenvolvimento da investigação a concretizar no estudo principal.

O primeiro objectivo é a avaliação, reformulação ou eventual refinamento das questões iniciais da investigação, para as quais pretendo obter respostas através do estudo principal. Estas questões são sugeridas, sobretudo, pela revisão de literatura relevante que informa o quadro teórico, pelo meu trabalho anterior (Henriques, 2006; Henriques & Ponte, 2008) e pela minha experiência no ensino da Análise Numérica. Abrangem, por isso, um espectro bastante alargado de problemáticas que penso ser necessário delimitar para permitir um adequado aprofundamento das questões.

O outro objectivo é a avaliação das tarefas de exploração e investigação que são usadas na experiência de ensino que configura o estudo principal e o próprio trabalho de investigação. A realização de tarefas de investigação é a forma escolhida para ter acesso ao desempenho dos estudantes relativamente às estratégias de raciocínio utilizadas, à capacidade de resolução de problemas e aos aspectos do seu pensamento matemático. O estudo exploratório pode confirmar que as tarefas de investigação construídas e que são propostas aos estudantes durante a experiência de ensino, são uma fonte rica de evidência para uma investigação em cognição matemática e salientar os principais focos de interesse de análise a seguir no estudo principal.

Aspectos metodológicos

O foco deste estudo está na compreensão dos processos de pensamento dos estudantes quando se envolvem na realização de tarefas de investigação e a identificação dos potenciais ganhos educacionais de tal actividade de aprendizagem. Assim, considero adequado recolher informações sobre as reacções dos estudantes através de um contexto que possa ser observado 'em acção', de forma a produzir uma interpretação do fenómeno essencialmente descritiva e fundamentada nos dados empíricos.

O estudo exploratório realiza-se no final do ano lectivo de 2007/08, durante os meses de Abril e Maio e tem como base uma série de três encontros extracurriculares entre mim, enquanto investigadora, e doze alunos do 2.º ano dos cursos de mestrado integrado da Escola Naval. Os alunos participantes neste estudo já têm aprovação na disciplina de Análise Numérica, leccionada por mim no 1.º semestre seguindo uma metodologia tradicional de ensino na universidade. Desta forma, existe já uma relação de conhecimento e confiança mútuos entre mim e os alunos, facilitadora do trabalho de investigação a desenvolver. Por minha solicitação, são constituídos quatro grupos de três alunos cada. Estes grupos, formados de modo espontâneo e voluntário, no seu conjunto, representam a plateia típica da disciplina de Análise Numérica de um ponto de vista matemático.

Os encontros com os alunos, de duração aproximada de uma hora, são preparados e conduzidos para os envolver na realização de um conjunto de tarefas de investigação e/ou exploração contextualizadas na Análise Numérica que provocam o seu pensamento e os ajudam a desenvolver algumas das características do trabalho investigativo matemático e, dessa forma, actuarem como verdadeiros matemáticos. Como a minha intenção é manter a uniformidade das condições/contexto, as tarefas aplicadas são as mesmas aos quatro grupos de estudantes participantes neste estudo. Durante os encontros com cada um dos grupos, os estudantes são observados, por mim, no papel de investigadora, permitindo observar com mais detalhe os processos em que os alunos se envolvem na resolução de tarefas investigativas e as dificuldades com que se debatem. O meu papel aqui é diferenciado do papel de professora, tendo como preocupação primordial observar e conduzir a investigação, recolhendo dados com bastante detalhe. O sucesso também é encarado de modo diferente uma vez que o que pretendo atingir, enquanto investigadora, é aquilo que se pode designar por uma boa investigação sem estar preocupada com conteúdos e resultados específicos. Ocasionalmente, coloco questões que conduzem a uma participação mais efectiva dos alunos, solicitando que explicitem os seus raciocínios e estratégias seguidas de forma escrita e em voz alta. Desta forma, é possível identificar os processos e procedimentos que estão subjacentes ao raciocínio desenvolvido pelos estudantes e a sua compreensão sobre o processo investigativo. Encontro-me assim, numa situação de observação participante que me permite interagir com os alunos, tentando, no entanto, tomar uma postura que não altere o seu modo de realização das tarefas.

Durante a observação tiro notas de campo, com o objectivo de registar informações pormenorizadas sobre os factos observados e descrições de episódios respeitantes às actividades desenvolvidas pelos alunos. A par desta parte descritiva, os registos elaborados por mim contemplam ainda reflexões sobre aspectos que, a meu ver, se revelam importantes para uma melhor planificação e condução dos encontros seguintes. Com autorização dos alunos, estes encontros são registados através de gravações áudio que permitem complementar as notas de campo relativamente ao seu desempenho durante a realização das tarefas investigativas e uma melhor compreensão e interpretação dos seus raciocínios. O trabalho de observação no campo é ainda complementado com os registos escritos produzidos pelos alunos durante os encontros de exploração das tarefas de investigação propostas.

Opto por um esquema essencialmente descritivo para sistematizar os dados e sintetizar os resultados mais relevantes. Após cada episódio correspondente ao trabalho dos grupos na realização de uma das tarefas de investigação propostas, passo em revista os documentos produzidos pelos alunos na sua realização. Em seguida, transcrevo diversas partes dos registos áudio que considero significativas e analiso as notas de campo, anotando os aspectos que pretendo salientar. Preparo assim, um registo narrativo (relato) de cada encontro, integrando todos os dados disponíveis a ele referente. Estes registos consistem em considerações/explicações detalhadas e cronológicas sobre o que acontece em cada encontro, incluindo excertos exemplificativos, retirados dos trabalhos escritos pelos alunos e dos registos áudio, de forma a ilustrar as ideias expressas nas descrições ou resultados. Nesta descrição, a maior relevância recai sobre os processos de raciocínio desenvolvidos durante a realização das tarefas de investigação.

Tendo em conta que os objectivos deste estudo exploratório, tal como já referido, estão relacionados com a avaliação das questões iniciais da investigação e das próprias tarefas de investigação, enquanto forma de ter acesso ao desempenho dos estudantes, a análise dos seus resultados é focada em duas perspectivas. Primeiro, determinar se as tarefas de investigação facilitam o acesso às expressões de cognição matemática dos alunos e o papel que desempenham no desenvolvimento das suas estruturas cognitivas. Depois, decidir quais os aspectos que emergem deste estudo e que devem ser seguidos no estudo principal.

Resultados

Os resultados obtidos revelam que o potencial das actividades de investigação, como fonte de informação, é grande. Durante a realização destas tarefas, os alunos expressam-se de forma livre e em detalhe sobre os aspectos problemáticos que enfrentam, salientando a individualidade dos seus processos de aprendizagem. No entanto, apresentam grande resistência a uma abordagem mais aberta à aprendizagem da Matemática. A sua tendência para se basearem na memorização mostra isso. Quando trabalham com algum aspecto que encontram em disciplinas anteriores, a primeira tentativa é quase sempre tentsr lembrar o que é ensinado, em vez de pensar sobre o problema por eles próprios e usar a oportunidade para utilizar uma nova abordagem na situação. O facto dos alunos já terem frequentado a disciplina de Análise Numérica, segundo os moldes tradicionais de ensino universitário, torna os tópicos abordados nas tarefas de investigação assuntos familiares para os estudantes, apesar de nem sempre conseguirem recordá-los com facilidade. Nesta situação não me parece que os alunos desenvolvam aprendizagens significativas como resultado desta experiência. A falta de hábito dos alunos na realização de actividades de investigação também só pode ser ultrapassada com um trabalho continuado em torno de actividades deste tipo. O pequeno número de actividades (três actividades em dois dos grupos e duas actividades nos restantes dois) e o limite de tempo em que são realizadas (uma hora cada), num espaço de tempo igualmente limitado (um mês), não oferece muitas oportunidades aos estudantes para organizar, sintetizar, avaliar, discutir e reflectir sobre o trabalho desenvolvido. O seu crescimento na compreensão da natureza da Matemática não pode ser realizado num espaço de tempo tão curto sem possibilidade de reflexão e ocasiões de actividade criativa. Assim, considero importante uma experiência mais prolongada na realização de actividades de investigação, planeada para que as tarefas sejam propostas aos alunos antes de introduzir os conceitos e procedimentos de Análise Numérica e incluam oportunidades de discussão e reflexão sobre o trabalho desenvolvido, para que os alunos tirem vantagens desta nova oportunidade de aprendizagem e para permitir uma análise correcta das alterações que ocorrem no comportamento dos estudantes enquanto as realizam.

Um dos aspectos que também emerge deste estudo é relativo às dificuldades que os alunos evidenciam quando exploram as tarefas propostas. As dificuldades identificadas não estão limitadas a categorias definidas *à priori* mas podem ajudar a salientar diferentes aspectos dos processos de pensamento dos alunos e a mostrar o potencial das actividades de investigação como fonte de aprendizagem. Por isso, deve ser equacionada a inclusão de uma análise sobre as dificuldades dos alunos relativas às representações matemáticas que constroem e aos processos matemáticos e estratégias de resolução de problemas que utilizam.

A análise dos dados permite, ainda, ajustar a forma como estão escritas algumas questões, no enunciado das tarefas, de modo a evitar respostas simples e imediatas de sim ou não, levando os alunos a explorá-las.

Assim, apesar de me basear em teorias e resultados anteriores de investigação, que servem de cenário para fornecer pistas e dirigir o estudo de modo a contextualizar os resultados, também uso este estudo exploratório para perceber quais as questões mais importantes que dele emergem e que são aprofundadas no estudo principal.

3.3. Selecção dos casos

O propósito deste estudo é descrever e analisar situações que decorrem da aplicação de uma experiência de ensino realizada com os alunos do 2.º ano dos cursos de mestrado integrado da Escola Naval que frequentam a disciplina de Análise Numérica. A escolha destes participantes não obedece a nenhum critério estabelecido previamente, opto apenas por realizar a experiência de ensino com os meus alunos, dado que sou a docente da referida disciplina.

Apesar dos alunos estarem divididos em duas turmas, a experiência de ensino proposta abrange todos os alunos. Mesmo com a tecnologia mais sofisticada e um grande número de observações é virtualmente impossível seguir os processos de raciocínio e as reacções de cada estudante individual num grupo alargado. Em Henriques (2006), são constituídos como casos, dois grupos de alunos que são observados durante a realização de tarefas de investigação, no seu ambiente natural – a sala de aula. Nesse estudo não me proponho discutir com os alunos o seu desempenho. No entanto, os resultados então obtidos evidenciam que este procedimento, feito sistematicamente no final de cada tarefa realizada, pode enriquecer os dados de forma a possibilitar alguma reestruturação das actividades, ainda no período da sua implementação. Além disso, quando a investigação é conduzida com um grupo pequeno de estudantes, fora das aulas regulares, uma interacção próxima é possível, permitindo não só a reconstrução do que cada estudante individual está a fazer mas também questioná-lo sobre o que está a fazer e porquê e o que ele pensa sobre a actividade em que está envolvido. Embora isso não replique a relação entre professor e aluno, típica do ensino regular de uma sala de aula, permite uma visão útil e até algumas vantagens sobre a investigação conduzida numa aula usual. Por isso, neste estudo, centro a minha atenção num reduzido número de estudantes, seleccionados de acordo com os critérios a seguir definidos, que vão ser analisados individualmente e que constituem os casos.

Critérios de selecção. Cada um dos alunos das turmas representa uma possibilidade de caso a estudar e, como tal, é necessário seguir critérios que permitam seleccionar alguns deles. Dado que o estudo não é pensado numa perspectiva de amostragem, a identificação do número de casos a seleccionar é, assim, um passo importante na realização de estudos de caso (Merriam, 1988; Stake, 2007; Yin, 2003). Tendo em conta as características do estudo a realizar e o contexto em que este se desenvolve, opto por seleccionar seis alunos que, de forma voluntária, mostram disponibilidade para constituir casos. Considero que este número de alunos permite, por um lado, salvaguardar alguns imprevistos que podem ocorrer durante a recolha de dados e, ainda assim, garantir que no final da experiência tenho a quantidade de replicações teóricas e descritivas que pretendo enquanto investigadora (Yin, 2003). Por outro lado, constitui uma dimensão de trabalho à qual consigo dar resposta.

Além disso seleciono um conjunto de alunos, que reflectem, de um ponto de vista matemático, a diversidade de desempenhos dos alunos que frequentam a disciplina de Análise Numérica na Escola Naval, adoptando como referência as classificações obtidas no final do 1.º ano. Numa primeira fase ocorrem algumas conversas informais entre mim e alguns professores destes alunos de forma a encontrar aqueles que podem ser considerados informantes privilegiados, no sentido usado por Costa (1986). Procuro assim identificar possíveis candidatos, nomeadamente aqueles que manifestam uma maior participação no questionamento feito pelo professor nas aulas. A decisão final sobre a escolha dos alunos para os estudos de caso é, no entanto, tomada com base nas suas respostas a um questionário inicial (Anexo 1), aplicado na primeira aula do semestre. Depois de analisar as suas estratégias de resolução e tendo em atenção os níveis de desenvolvimento evidenciados, procuro que os casos sejam diversificados e que evidenciem características diferentes ao nível dos processos de raciocínio utilizados pelos alunos, bem como uma certa facilidade de comunicar oralmente e por escrito.

A escolha destes alunos que constituem os estudos de caso é intencional, apesar do objectivo da selecção dos participantes não ser a representatividade estatística (Stake, 2007) mas sim o acesso aos indivíduos disponíveis para partilhar o seu pensamento matemático de uma forma que permita a emergência de categorias teóricas ricas tendo em conta a sua cognição matemática. No paradigma interpretativo privilegiam-se amostras intencionais, por se pretender que os participantes no estudo possuam características que permitam compreender os aspectos particulares dos fenómenos que interessam ao investigador (Merriam, 1988; Ponte, 2006; Yin, 2003).

O questionário inicial para a selecção dos casos (Anexo 1) apresenta duas secções: uma relativa às atitudes dos estudantes face à Matemática, outra que contém questões de Matemática, uma das quais de cunho exploratório, acessíveis aos alunos deste nível de ensino. As questões destas secções são escolhidas a partir das que, na literatura ou na minha experiência anterior como professora, mostram discriminar os aprendentes com diferentes habilidades matemáticas.

O primeiro conjunto de sete questões fechadas convida os alunos a classificar as suas concepções e atitudes relativamente à Matemática. As razões para estabelecer esta primeira secção de questões baseiam-se no pressuposto que uma mudança para uma atitude positiva em relação à Matemática (por exemplo, aumento da confiança na resolução de problemas, redução na tendência para desistir perante um problema difícil, diminuição da ansiedade e medo e dar sentido à Matemática estudada) ocorre simultaneamente com a mudança do ponto de vista dos estudantes sobre a natureza da Matemática (Yusof & Tall, 1994). Assim, é de esperar que diferentes atitudes no processo de aprendizagem se situem entre os que entendem a "Matemática como um processo de pensamento activo" e aqueles que a vêm como um “corpo fixo de conhecimentos”, consistindo em “factos abstractos e procedimentos para serem memorizados” (Yusof & Tall, 1994, p. 401).

As questões da segunda parte do questionário são colocadas para ajudar a discriminar aspectos do desenvolvimento dos estudantes que são considerados básicos quando lidam com Matemática num nível avançado: flexibilidade no pensamento, na forma de usar ideias conceptuais na realização de tarefas de uma forma eficiente, o estabelecimento de argumentos formais convincentes e competência na escolha de um conjunto de factos e procedimentos para lidar com situações novas de resolução de problemas. Algumas destas questões são também usadas em estudos anteriores e mostram serem discriminatórias entre diferentes grupos de estudantes (Lithner, 2000b; Pinto, 1998).

A questão 1, convida os estudantes a aplicar o algoritmo da diferenciação e pretende obter alguma indicação dos estudantes que são flexíveis quando pensam e trabalham em Matemática. Os estudantes podem reescrever a expressão da função como $\mathrm{f(x)} = 1+x^{-2}$, obtendo a sua derivada de forma directa $\mathrm{f'(x)} = -2x^{-3}$ ou usar a regra do produto, depois de modificar a expressão da função. Esta habilidade dos estudantes, em fazer ligações apropriadas entre conceitos e utilizar métodos para economizar processos indica flexibilidade no pensamento. Estas duas abordagens são contrastantes no que diz respeito ao uso da regra do quociente, o que pode indicar um trabalho puramente procedimental, aplicando mecanicamente regras para obter respostas para as questões.

A questão 2 identifica os estudantes que revelam algum tipo de contacto com os aspectos formais da Matemática através do seguimento de um caminho lógico quando argumentam sobre afirmações matemáticas. É esperado que alguns estudantes possam sentir que tal afirmação é tão óbvia que não precisa de ser verificada ou podem mostrar que funciona, mostrando exemplos particulares (Balacheff, 1988; Bell, 1976, 1979). Dos alunos que não conseguem seguir um caminho lógico quando apresentam a sua resposta, espero ganhar uma compreensão dos seus modos de pensamento e argumentação em Matemática.

A questão 3 procura uma compreensão das habilidades dos estudantes em trabalhar com desigualdades. Se aplicarem correctamente o procedimento frequentemente utilizado na sua escolaridade anterior, os estudantes devem considerar separadamente as possibilidades de para $x - 2 \geq 0$ e $x - 2 \leq 0$. Neste caso particular pode ser resolvido observando que o lado esquerdo da inequação deve ser positivo, o que apenas requer procurar soluções para $x - 2 > 0$. Isto deve descriminar entre os que aplicam rotinas e procedimentos mecanicamente ou de forma reflectida.

As questões 4 e 5 não são tarefas puramente rotineiras nem problemas genuínos. O principal propósito para a escolha destas duas questões é criar situações de resolução de tarefas, onde existem oportunidades para mostrar competência na utilização de argumentos baseados na visualização, na escolha de uma variedade de factos e procedimentos familiares e em lidar com novas situações de resolução de problemas usando raciocínio plausível ou outro tipo de raciocínio construtivo. Desta forma é possível analisar, no trabalho dos estudantes, o balanço entre o raciocínio plausível e o que é baseado em experiências anteriores (Lithner, 2000b).

A questão 6 é uma tarefa de cunho investigativo e permite múltiplas respostas correctas. Os estudantes podem escolher diferentes objectivos específicos para alcançar e podem ver se existem padrões nos dígitos ou na soma destes. O objectivo é verificar se os estudantes tiveram contacto com tarefas investigativas e a criatividade que demonstram neste tipo de tarefas.

A correcção e a análise destas questões fornecem suporte qualitativo e quantitativo para a selecção dos participantes. As questões são classificadas considerando a sua correcção matemática e codificadas de acordo com a abordagem usada pelos estudantes, salientando os aspectos qualitativos em consideração na construção do questionário. O objectivo é proceder a um diagnóstico da capacidade dos alunos na utilização de processos de pensamento que permitam contrastar diferenças individuais que podem ocorrer nas estratégias quando constroem conhecimento que pode ou não levar ao sucesso.

Caracterização dos casos. A primeira parte do questionário, sobre as atitudes dos alunos em relação à Matemática, não é efectivamente usada na selecção dos casos, uma vez que as respostas apontam para a predominância de atitudes positivas e a sua análise detalhada só é considerada mais tarde neste estudo, na descrição do trabalho desenvolvido pelos alunos ao longo da experiência de ensino.

Nas questões da segunda parte do questionário, os alunos mostram grandes dificuldades de diferente tipo. Um facto significante é que nenhum aluno responde correctamente a todas as questões do questionário, apesar de todos terem os recursos necessários para o fazer e vários chegam mesmo a não responder a algumas questões.

As suas estratégias são principalmente baseadas na aplicação rotineira de métodos que conhecem como familiares, usados anteriormente em tarefas semelhantes. Isto causa problemas quando essas rotinas familiares não funcionam por qualquer motivo e levam os alunos a cometer muitos erros de falta de cuidado que não identificam. A presença de raciocínio plausível é mínimo e as abordagens gráficas são inexistentes ou mínimas e superficiais. Mostram falta de contacto com os aspectos formais da Matemática, raramente argumentam e quando o fazem não seguem um caminho lógico. Nota-se ainda a falta de hábito em trabalhar com tarefas de cunho investigativo pois sentem-se perdidos na última questão sem saber 'o que é para fazer'.

Seis alunos são seleccionados e convidados a participar nas entrevistas: Carlos, Pedro, Nuno, Luis, Gonçalo e Sérgio. De acordo com as suas classificações e estratégias de raciocínio, estes alunos são representativos de todos os que respondem ao questionário. Como já referido, pretendo analisar um espectro de desempenho dos alunos, tão completo quanto possível, que permita abranger a diversidade de estratégias por eles apresentada e contrastar diferenças individuais no uso dessas mesmas estratégias. Assim, um princípio subjacente à selecção dos alunos para entrevista é a polarização, ou seja, são seleccionados alunos que pertencem à cauda superior e inferior da distribuição das classificações quantitativas dos alunos no questionário inicial e alguns representantes do grupo de classificações na vizinhança da média. Os outros aspectos considerados na selecção são os aspectos qualitativos das abordagens usadas pelos alunos e a representatividade dos diferentes cursos a que estes pertencem. Como não é minha intenção fazer comparações ou tirar conclusões baseadas no género, não selecciono a única rapariga a frequentar o 2.º ano porque não se disponibiliza para participar nas entrevistas.

Carlos é um aluno de topo do curso de Engenharia de Armas e Electrónica. Apresenta soluções breves e maioritariamente correctas em todas as questões do questionário, apesar de usar procedimentos rotineiros mas que domina. O raciocínio que guia as escolhas das estratégias é principalmente baseado em experiências anteriores mas consegue ser reflexivo e crítico em relação às respostas dadas. Mostra ainda alguma criatividade nas tentativas que faz de exploração da questão de cunho investigativo, nem sempre bem sucedidas.

Pedro, Luis e Nuno obtêm classificações médias no questionário e apresentam um trabalho com características semelhantes, considerado típico de um aluno médio e procedimental, aplicando algoritmos com eficiência quando nenhum caso particular é necessário considerar. Algumas situações sugerem que desenvolvem trabalho reflectivo apesar de não ser completamente satisfatório. O seu desempenho académico é considerado médio/bom, na hierarquia do curso estão colocados acima da mediana e pertencem às classes de Marinha, Engenheiros de Armas e Electrónica e Administração Naval. Distingue-os diferentes visões sobre a prova e a interferência da visualização nas suas respostas.

Gonçalo e Sérgio têm um fraco desempenho neste inquérito inicial pois não tentam responder à maior parte das questões. Apresentam pouca flexibilidade na aplicação de algoritmos rotineiros e os poucos raciocínios explicitados foram essencialmente procedimentais. Quando uma estratégia falha, estes alunos não mostram realizar qualquer reflexão sobre os procedimentos e muito menos sobre os resultados, maioritariamente errados, que apresentam. Sérgio é um dos dois únicos alunos que afirma (na primeira parte do questionário) não gostar de participar em debates e é considerado um aluno com fraco desempenho académico, encontrando-se hierarquicamente nas últimas posições. Pelo contrário, o Gonçalo encontra-se nas primeiras posições da hierarquia, aparece também como um dos alunos de topo mas que parece ter esquecido como se resolve algumas questões.

Durante a realização da experiência de ensino, que coincide com a fase de recolha de dados, Nuno desiste do curso e abandona a Escola Naval. Os compromissos académicos e os empenhamentos extra-lectivos que os alunos, por determinação, têm que cumprir e que nem sempre são passíveis de planeamento, impedem que Pedro e Sérgio participem em algumas das aulas dedicadas à realização das tarefas de investigação. Consequentemente, a recolha de dados relativos a estes alunos fica muito limitada e comprometem, assim, a sua participação neste estudo, enquanto casos. Deste modo, opto por considerar, neste estudo, apenas os três casos cuja análise é possível realizar de forma completa: Carlos, Gonçalo e Luís.

3.4. Procedimentos e técnicas de recolha de dados

O estudo é desenhado para aceder aos processos de raciocínio e estratégias dos alunos nas suas tentativas de dar significado aos conteúdos programáticos da Análise Numérica. Dado que pretendo recolher informações sobre as reacções dos alunos num contexto que envolve observação ‘em acção’, o estudo não fica restrito à análise do desempenho de indivíduos no final da sua participação. É necessário recolher um conjunto de dados sobre o que acontece durante a realização das tarefas de investigação e sobre as percepções dos estudantes participantes no estudo. Recorro a um leque alargado de fontes de informação de modo a que os vários instrumentos de recolha de dados não só se complementem mas também permitam uma abordagem a partir de diversas perspectivas (Bogdan & Biklen, 1994). A recolha dos dados empíricos é realizada no decorrer do 1.º semestre do ano lectivo de 2008/09, utilizando, como descrevo a seguir, diversos instrumentos de recolha de dados, seleccionados de entre as técnicas mais usadas na metodologia qualitativa: observação participante, entrevistas, questionários e análise documental.

Observação participante. As observações são cruciais como técnica de recolha de dados em abordagens qualitativas, pois permitem obter informação normalmente não acessível por outros processos (Ludke & André, 1986). A observação qualitativa é fundamentalmente naturalista pois ocorre no contexto dos acontecimentos e das experiências que queremos observar, permitindo registar comportamentos e acontecimentos à medida que estes vão ocorrendo. Possibilita, ainda, um contacto pessoal e estreito do investigador com o fenómeno a investigar.

Na observação participante o investigador acaba por se tornar um membro da comunidade ou da população em estudo, participando nas respectivas actividades e observando o modo como as pessoas se comportam e interagem umas com as outras. O investigador integra-se no grupo, o que é fundamental para compreender e interpretar o que está a acontecer. A dimensão desta integração depende, em grande parte, das características do estudo a desenvolver, das características dos participantes e do tipo de questões a estudar. Merriam (1988) discute os diferentes graus de participação que podem ser adoptados pelo investigador no decurso das suas observações. Entre as duas posições extremas de observador "totalmente participante" e "meramente espectador" existe um contínuo e, muitas vezes, o grau de participação do investigador varia ao longo do estudo (Matos & Carreira, 1994).

Este estudo privilegia a observação participante, em que a investigadora desempenha simultaneamente o papel de docente da disciplina. Este tipo de observação, sendo particularmente adequada para estudar muitos aspectos da interacção humana, tem em vista compreender em profundidade os processos em que os alunos se envolvem na resolução de tarefas de investigação e as questões com que se defrontam. Estou consciente da dificuldade desta posição. Ao mesmo tempo que é necessário participar no contexto em estudo, empenhando-me como professora, no ensino e apoio aos alunos, é preciso manter-me suficientemente desligada para o observar e analisar. A subjectividade associada à minha personalidade, valores e sentimentos é um factor a que presto também especial atenção. Tento que estes elementos não interfiram negativamente na observação e interpretação dos acontecimentos, mas sim que possam constituir um factor facilitador da investigação. Tento, ainda, que a minha postura permita um desenvolvimento das actividades próximo do habitual de forma a não induzir, com a minha presença, modificações de comportamento dos alunos, diminuindo o chamado "efeito do observador".

Para Bogdan e Biklen (1994), uma forma de tornar a observação participante mais eficiente é recorrer a notas de campo que devem ser detalhadas, extensas e precisas. Embora os autores considerem que na observação participante todos os dados recolhidos são notas de campo, esta técnica pode ser encarada de forma mais restrita, considerando apenas que se trata de notas tomadas como forma de complementar aquilo que não é possível recolher com base nas outras técnicas, constituindo assim o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experimenta e pensa no decurso da recolha de dados num estudo qualitativo. A principal característica destas notas é a sua capacidade de descrever com exactidão o que está a acontecer, nomeadamente fazendo um retrato dos sujeitos, uma descrição do espaço físico, o relato dos acontecimentos particulares, a descrição pormenorizada das actividades e o comportamento do observador.

Durante a realização das tarefas de investigação, eu, enquanto investigadora, desloco-me entre os alunos e tiro notas de campo, registando ainda durante a aula algumas informações pormenorizadas sobre os alunos e o seu envolvimento neste tipo de tarefas, relatos de acontecimentos inesperados, conjecturas sobre factos observados e descrições de episódios respeitantes às actividades por eles desenvolvidas. Procuro ainda registar informações sobre as dúvidas geradas pelas próprias tarefas e perceber quais as estratégias usadas pelos alunos na sua resolução. Coloco também questões que conduzam a uma participação mais efectiva dos alunos levando-os a explicitar os seus raciocínios de forma escrita e em voz alta, de modo a identificar a sua compreensão dos aspectos a investigar. As questões colocadas servem como indicadores do desempenho dos alunos quando lhes procuram responder, sendo possível, por vezes, identificar os processos e procedimentos subjacentes ao raciocínio desenvolvido. Encontro-me, assim, numa situação de observação participante que me permite interagir com os alunos, tomando, no entanto, uma postura que não altere o modo de realização das tarefas.

No entanto, e porque não é fácil tomar notas durante as aulas ao mesmo tempo que apoio os alunos, procuro organizar um registo escrito do que observo no mesmo dia da aula de exploração das tarefas, pois alguns aspectos são, necessariamente, baseados na memória. Faço o registo de situações que ocorrem e que me parecem pertinentes relativamente ao objectivo do estudo, tentando que este descreva a aula, de forma mais fiel possível, seguindo um guião previamente estabelecido (Anexo 6). Por exemplo, assinalo a forma como as tarefas são introduzidas e como os alunos iniciam a sua exploração, o tempo previsto e o tempo efectivamente gasto para a sua realização, os impasses que surgem e pequenos diálogos e dificuldades que se manifestam. A par desta parte descritiva existe uma parte reflexiva, que contém a parte mais subjectiva das notas, com reflexões sobre a análise, o método, os conflitos e dilemas éticos, o ponto de vista do observador e pontos de clarificação (Bogdan & Biklen, 1994). Assim, os registos por mim elaborados contemplam ainda, reflexões pessoais sobre aspectos que considero potencialmente importantes para uma melhor planificação e condução das aulas seguintes e das próprias entrevistas aos alunos que constituem os casos. Desta forma, no presente estudo, as notas de campo são um registo sistemático das observações realizadas por mim sobre os acontecimentos na sala de aula, complementadas por reflexões pessoais sobre os acontecimentos observados.

A tomada de notas é uma forma de registo selectivo de eventos. É difícil manter a conversação e reproduzir de forma exacta no papel mais do que poucas linhas consecutivas de informação ou diálogo. Existe também o risco de assinalar apenas uma selecção espontânea do que vale a pena anotar numa situação observada e assim perder informação útil. Neste sentido, sinto necessidade de criar condições para garantir uma melhor captação das reacções e raciocínios dos alunos no decorrer das aulas de realização de tarefas de investigação e selecciono a gravação áudio como uma abordagem apropriada para complementar a tomada de notas e minimizar estes problemas. No entanto, não me é possível gravar todos os momentos das aulas dedicadas à exploração das tarefas propostas durante a realização da experiência de ensino, pelo que apenas algumas das aulas de discussão em grande grupo são áudio gravadas.

Entrevistas. No ponto anterior refiro a dificuldade de um acompanhamento continuado dos alunos em observação durante a realização das tarefas na sala de aula e as consequências que este facto acarreta, nomeadamente a redução da perspectiva geral de funcionamento das aulas e de toda a turma perante as tarefas de investigação. Num estudo que visa a clarificação e a compreensão dos efeitos gerados pela introdução de um conjunto de factores, em particular as tarefas de exploração/investigação, é necessário diversificar as experiências com os alunos a observar. Deste modo, realizo igualmente entrevistas.

Uma entrevista consiste numa conversa intencional entre duas ou mais pessoas, dirigida pelo entrevistador, com objectivo específico de obter informação relevante para a investigação (Cannell & Kahn, 1968). Este método de recolha de dados permite clarificar os acontecimentos, ajudando o investigador a interpretar as acções e atitudes dos participantes. Desta forma, constitui um instrumento de recolha de dados privilegiado na investigação qualitativa, permitindo obter de um modo completo e imediato a informação desejada e tornando possível o seu aprofundamento (Ludke & André, 1986). As entrevistas podem constituir a estratégia dominante para a recolha de dados ou podem ser utilizadas em conjunto com a observação participante, análise de documentos e outras técnicas (Bogdan & Biklen, 1994).

A escolha do tipo de entrevista e o seu grau de estruturação depende do objectivo da investigação, podendo até ser usadas entrevistas de mais do que um tipo em diferentes fases de uma mesma investigação. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), as entrevistas qualitativas variam quanto ao grau de estrutura. Existe um contínuo desde a entrevista estruturada, em que o conteúdo e os procedimentos são organizados antecipadamente e o entrevistador tem pouca liberdade para alterações ao guião durante a respectiva realização, até à entrevista não estruturada, onde o seu conteúdo e a sequência das questões estão inteiramente nas mãos do entrevistador.

Para este estudo, e como complemento da observação realizada nas aulas de exploração das tarefas, realizo entrevistas individuais aos alunos que constituem os estudos de caso. Estas entrevistas contam apenas com a presença da investigadora e dos alunos a serem entrevistados e decorrem após a realização das tarefas, como conversas informais em que evito conduzir a entrevista e restringir a temática a abordar, dando liberdade aos entrevistados para produzirem o seu discurso, de forma a obter a maior quantidade de informação possível. O período durante o qual decorre a entrevista é sempre marcado de acordo com a disponibilidade dos alunos, normalmente fora do período lectivo, de forma a não interferir com as actividades curriculares. São realizadas em ambiente informal e, com a autorização dos alunos visados, as entrevistas são registadas através de gravações áudio tendo em vista captar aspectos que de outra forma podem passar despercebidos e, ao serem analisados mais tarde, fora do contexto dos encontros, fornecer elementos importantes sobre o que ocorre.

O foco dessas entrevistas é determinado pelo trabalho desenvolvido na realização das tarefas de investigação e o meu objectivo é a compreensão das estratégias desenvolvidas pelos alunos e a obtenção de dados significativos para clarificar ambiguidades ou verificar explicações das concepções dos entrevistados.

Opto por entrevistas semi-estruturadas, guiadas por questões gerais e centradas em tópicos que emergem da análise do material escrito e que não podem ser claramente inferidas das tarefas. As entrevistas iniciam-se com um conjunto de questões relacionadas com as respostas dadas (ou não) pelos alunos na exploração da tarefa, de modo a compreender o seu significado. Estas não decorrem, por isso, de um guião previamente estruturado mas acompanham a própria estrutura de cada tarefa, em que cada nova questão é adaptada em função da resposta ou da informação que o aluno der, a fim de a aprofundar e melhorar a sua compreensão e acompanhar o raciocínio dos alunos. No entanto, globalmente, as questões abordam os seguintes aspectos: (i) quais as razões que levam os alunos a optar por utilizar determinada(s) representações, estratégia(s) de resolução e/ou processos de raciocínio e como o fazem; (ii) quais as dificuldades que encontram na exploração das tarefas propostas e como as ultrapassam (se o fazem). Nestas entrevistas procuro, igualmente, que os alunos comentem aspectos concretos relativos à experiência que vivem nas aulas. Tento saber o que eles pensam sobre as tarefas, a forma como decorrem e como contribuem para a sua aprendizagem. Neste sentido, realizo cinco entrevistas a cada um dos casos, com uma duração de tempo variável, entre 30 a 60 minutos, dependendo da discussão que ocorra.

As questões das entrevistas e a sua condução são estabelecidas para permitir conversas mais ou menos abertas e naturais e a obtenção de respostas francas dos alunos. Informo previamente os alunos que o objectivo é questioná-los acerca dos processos de resolução adoptados, não para indicar se as suas respostas estão certas ou erradas, mas apenas para tentar compreender como é obtida essa mesma resposta. Durante as entrevistas tento sempre que a minha postura e as minhas perguntas e respostas sejam as mais neutras possíveis, para que os alunos não foquem a sua atenção em indícios imprevistos em vez de seguirem o seu próprio raciocínio. Mantenho ainda alguns cuidados relacionados com movimentos faciais, expressões, intensidade da voz e movimentos, de modo a que estes não sejam entendidos pelos alunos como sinais de aprovação ou desaprovação (Hunting, 1997).

Finalmente, é de referir que um conjunto de questões de base para as últimas entrevistas podem ainda ser desenhadas a partir dos assuntos que surgem durante as primeiras entrevistas.

No decurso destas entrevistas gravadas, as notas de campo podem também ser uma ajuda preciosa, pois evidenciam situações que não são captadas pelo gravador, como, por exemplo, os gestos feitos pelos participantes, as expressões faciais ou até mesmo comentários feitos antes e depois da entrevista que podem ajudar à compreensão da situação.

Questionários. Para este estudo, são elaborados dois questionários, aplicados no início e no final da experiência de ensino a todos os alunos das duas turmas. O questionário inicial, já descrito anteriormente, é aplicado na primeira aula do semestre com o objectivo de seleccionar os participantes que constituem os casos. Com a aplicação de um questionário final, após o término da experiência de ensino, pretendo conhecer a opinião individual de todos os alunos sobre alguns aspectos relacionados com a experiência.

O questionário final (Anexo 2) é constituído por vinte questões fechadas, elaboradas especificamente para este estudo. As primeiras sete questões referem-se aos aspectos já abordados no questionário inicial e têm como objectivo a análise das alterações verificadas nas concepções e atitudes dos alunos sobre a Matemática, após a experiência vivida. Com as restantes treze questões pretende-se obter as opiniões dos alunos sobre a experiência realizada nas aulas de Análise Numérica, relativamente às tarefas propostas, às dificuldades sentidas e ao modo como se desenvolve o seu processo de aprendizagem. Neste questionário utilizo uma escala de Likert, com 5 níveis (Tuckman, 2002): discordo totalmente, discordo parcialmente, não discordo nem concordo, concordo parcialmente e concordo totalmente. Solicito aos alunos que manifestem o seu grau de concordância ou de discordância relativamente a cada uma das questões que constituem o questionário. Além das questões fechadas incluo ainda, neste questionário final, algumas questões abertas, onde os alunos se podem manifestar mais livremente em relação aos aspectos que consideraram positivos ou negativos e dar sugestões para uma implementação futura com sucesso.

De forma a evitar que os alunos respondam de acordo com aquilo que julgam ser a expectativa da professora/investigadora, dando respostas "institucionalmente correctas", o questionário final é respondido de forma anónima. Desta forma, cada aluno pode manifestar a sua opinião com toda a sinceridade, sem o receio de qualquer tipo de represália ou estigma. A garantia de que as opiniões expressas pelos alunos não são identificadas, é também uma forma de assegurar a fiabilidade deste instrumento.

Análise documental. Nos métodos de recolha de dados acima descritos, o papel principal na produção dos dados cabe ao investigador, que escreve as notas de campo e conduz as entrevistas. O investigador pode complementar o trabalho de observação no campo com a recolha de informação e a posterior análise de aspectos documentados que são gerados no âmbito das actividades relacionadas com o problema em estudo, tais como relatórios, resoluções de problemas ou mesmo testes escritos.

A importância de recolher informações a partir da análise de documentos é referida por vários autores. Para Ludke e André (1986), a adopção de um instrumento de recolha de dados que consiste no uso de documentos constitui uma fonte viável e rica que permite obter evidências contextualizadas fundamentais para as suas conclusões. Merriam (1988) salienta que essa importância advém do facto de estes registos serem produzidos habitualmente de forma independente dos propósitos da investigação, o que não acontece com as entrevistas e as observações. Yin (2003), pelo seu lado, refere que os documentos são uma fonte de dados de grande importância porque permitem corroborar ou confirmar inferências sugeridas por outras fontes de dados. Este tipo de documentos pode ser uma fonte interessante de informação sobre as actividades realizadas e os processos que ocorrerem, gerando ideias para novas questões a retomar posteriormente através de novas observações ou entrevistas.

Subjacente à experiência de ensino, está um conjunto de tarefas de natureza exploratória em que é expressamente pedido aos alunos um registo escrito do seu trabalho. Assim, a análise dos documentos centra-se essencialmente nos relatórios escritos produzidos pelos alunos no final da exploração de cada uma das tarefas de investigação propostas. Estes trabalhos constituem documentos cuja análise permite verificar e complementar as observações efectuadas por mim durante as aulas de realização de tarefas e nas entrevistas.

Em síntese, a metodologia de recolha de dados não se extingue na observação da actuação dos alunos no decurso das tarefas de investigação em tempo lectivo. Pelo contrário, envolve a utilização de múltiplas estratégias, conforme se observa no quadro seguinte: (i) observação dos alunos na realização de tarefas de investigação, em situação de sala de aula; (ii) notas de campo respeitantes à actividade desenvolvida pelos alunos nas aulas de carácter investigativo; (iii) entrevistas aos alunos dos estudos de caso, no final da exploração das tarefas de investigação; (iv) questionários aplicados aos alunos no início e no final da experiência de ensino; e (v) relatórios escritos no final da exploração de cada tarefa. Esta variedade de formas de recolha de dados permite a triangulação dos resultados emergentes, com vista à consistência da própria informação recolhida e das interpretações produzidas.

Quadro 3.1
Recolha de material empírico: técnicas, fontes e formas de registo de dados

TÉCNICAS	FONTES	FORMAS DE REGISTO
Observação participante	Aulas + Professora	Notas de campo; Gravação áudio / transcrição
Entrevista	Alunos (casos)	Gravação áudio / transcrição
Questionário	Alunos	Questionário inicial e final
Recolha documental	Alunos	Relatórios escritos

3.5. Procedimentos e técnicas de análise de dados

As notas de campo, os registos áudio das aulas de discussão em grande grupo e das entrevistas aos alunos e os documentos por eles escritos, constituem a base da análise que permite estruturar o trabalho desenvolvido pelos alunos na exploração das tarefas de investigação propostas ao longo da experiência de ensino. A análise de dados, enquanto processo de organização e trabalho de todo o material obtido ao longo da pesquisa, de modo a aumentar a compreensão desse material e responder às questões da investigação, começa em simultâneo com a sua recolha, conforme sugerido por diversos autores (Bodgan & Biklen, 1994; Merriam, 1988). Atendendo a estas recomendações, procuro organizar todo o trabalho de modo a que o primeiro nível de análise dos dados decorra ao longo da sua recolha.

De facto, a análise dos dados inicia-se a partir da primeira tarefa, ainda que de um modo pouco aprofundado, tornando-se mais sistemática e formal após terminada a sua recolha. A descrição do que observo na sala de aula (e que registo nas notas de campo) durante a realização das tarefas propostas, permite destacar alguns aspectos e levantar algumas questões que considero importantes aprofundar, quer em relação às turmas em geral, quer em relação aos alunos constituídos como casos. Além disso, após a realização de cada uma das quatro tarefas de investigação propostas, analiso os relatórios produzidos pelos alunos relativos à sua exploração. Esta análise dos relatórios centra-se já nas categorias definidas relativas ao raciocínio do aluno (nas suas várias dimensões) e às aprendizagens. Além disso, conduz à estruturação de um conjunto de questões que constituem o eixo orientador das entrevistas a realizar aos alunos estudados como casos, depois de identificados os pontos que precisam de ser explorados ou esclarecidos, tendo como objectivo uma melhor compreensão do trabalho desenvolvido por estes alunos nas propostas de trabalho realizadas.

A segunda fase de análise de dados, mais profunda e estruturante, ocorre após terminada a sua recolha e pretende dar resposta às questões de estudo. Segundo Yin (2003), a análise de dados deve seguir os aspectos teóricos que orientam as questões de estudo, a selecção dos casos a estudar e a recolha de dados. As questões deste estudo inserem-se num contexto de experiência de ensino e pretendem iniciar uma discussão focada nas estratégias de raciocínio que os alunos utilizam e nas aprendizagens que desenvolvem quando realizam tarefas de investigação. Além disso, interessa discutir as potencialidades e recomendações que a experiência de ensino realça. Assim, terminado o trabalho de campo, considero necessário olhar novamente para os dados disponíveis com o objectivo de identificar um esquema descritivo que permita evidenciar a análise dos aspectos referidos, relacionados com as questões do estudo e que ao mesmo tempo integre os diferentes momentos da realização das tarefas na sala de aula. Tendo em vista a compreensão do ambiente de aprendizagem vivido pelos alunos e o modo como este pode influenciar a sua evolução relativamente à compreensão dos conceitos e procedimentos de Análise Numérica e à capacidade resolução de problemas, opto por organizar a análise do trabalho realizado pelas turmas ao longo da experiência de ensino, com ênfase nas diferentes fases de exploração das tarefas de investigação, mantendo uma sequência cronológica. Os dados são tratados e apresentados sob a forma de uma narrativa que contempla uma breve caracterização das turmas e a apresentação do seu trabalho durante a exploração das tarefas propostas (a apresentação da tarefa, a sua exploração na sala de aula, os relatórios escritos elaborados pelos alunos no final de cada tarefa e a discussão com toda a turma) incluindo uma síntese dos resultados mais relevantes do ponto de vista da investigação. Este processo inclui, ainda, excertos exemplificativos, retirados das notas de campo, dos relatórios elaborados pelos alunos e das aulas de discussão, de forma a ilustrar as ideias expressas nas descrições. Enquanto investigadora procuro analisar os dados usando a sua riqueza e respeitando a forma em que eles são registados ou transcritos, organizados em regra na forma de palavras ou imagens. Tudo é analisado com base no princípio de que nada é trivial e que tudo pode constituir uma pista para estabelecer uma maior compreensão do objecto de estudo.

Parece-me importante, também, tentar perceber a opinião dos alunos relativamente à experiência de ensino e, em particular, às tarefas propostas, bem como o seu papel nas concepções e atitudes dos alunos face à Matemática. Para isso, utilizo as entrevistas, os questionários inicial e final, aplicados a todos os alunos e as opiniões expressas por eles no final do relatório escrito de cada tarefa. A análise dos questionários, realizada também após o trabalho de campo, é feita questão a questão, utilizando procedimentos básicos descritivos. Os dados relativos às questões fechadas do inquérito final têm um tratamento quantitativo e são organizados em tabelas de frequências e apresentados graficamente. Para as questões abertas uso uma análise de conteúdo, sendo os resultados descritos resumidamente e evidenciados através de excertos e citações de respostas apresentadas pelos alunos.

O esquema de análise de dados referente aos casos individuais, embora mantendo o carácter essencialmente descritivo adoptado para as turmas, é alterado em relação ao anterior, com o objectivo de revelar o particular. Considerando o objectivo do estudo e tendo em conta alguns aspectos da revisão de literatura, parece natural estruturar esta análise em dois pontos: um relativo ao raciocínio do aluno e outro relativo às suas aprendizagens em Análise Numérica. Para isso, inicio um trabalho de revisão de todo o material disponível sobre cada caso (que esteja relacionado com o modo de cada aluno explorar as tarefas de investigação e de ver a sua aprendizagem) e separo-o por tarefa de investigação. A transcrição parcial das entrevistas (com base na audição repetida dos registos áudio) e a escrita dos alunos, durante as entrevistas, constituem uma importante fonte de informação relativa ao modo como se desenvolve o pensamento dos alunos, às estratégias utilizadas e às dificuldades por eles sentidas. Os relatórios escritos dos alunos ajudam a confirmar algumas indicações que registo também nas notas de campo, relativas ao progresso dos alunos nos diferentes aspectos em análise, prestando especial atenção às questões que colocam, às estratégias que adoptam, aos impasses que surgem e aos diálogos que efectuam na discussão em grande grupo.

O raciocínio do aluno é analisado segundo três dimensões que estão relacionadas com as questões do estudo: o trabalho com diferentes representações matemáticas, os processos matemáticos usados na realização de tarefas de investigação e as diferentes estratégias utilizadas na resolução de problemas. Além disso, a definição das categorias de análise para cada uma das dimensões referidas é feita *a priori*, com base no referencial teórico adoptado (Anexo 9). As representações matemáticas, utilizadas pelos alunos durante a realização das tarefas de investigação propostas, são categorizadas tendo por base os modos de representação de Duval (2006): (i) as representações essencialmente discursivas (a linguagem natural e as notações simbólica e algébrica); e (ii) as representações essencialmente visuais (as representações gráficas e as tabelas). Para cada tarefa, são analisadas as diferentes representações usadas pelos alunos na sua exploração, a função que essas representações desempenham e o modo como são usadas, incluindo as dificuldades que demonstram no seu uso. São também examinadas a mudança entre representações e o uso de múltiplas representações, uma vez que são estratégias usadas pelos estudantes de forma a resolver impasses no raciocínio e na resposta às questões das tarefas.

Os processos matemáticos descritos em Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) servem de base à análise do raciocínio dos alunos na exploração de tarefas de investigação. Para cada tarefa são analisados os diferentes processos utilizados pelos alunos na sua exploração e as dificuldades que manifestam com cada um deles.

O modelo apresentado por Pólya (1945) constitui a base para a análise do comportamento dos alunos durante a resolução de problemas. Esta análise permite classificar, em quatro fases principais, os seus percursos quando resolvem os problemas das tarefas propostas: (i) compreensão; (ii) planeamento e exploração; (iii) execução; e (iv) verificação. Em cada uma destas fases, são identificadas e caracterizadas as heurísticas mais comuns e os recursos mais utilizados pelos alunos e são descritos os seus usos e efeitos neste processo. Estas duas categorias de comportamento e conhecimento descritas por Schoenfeld (1985a) são, segundo o autor, relevantes para explicar o comportamento dos alunos na resolução de problemas. A análise dos recursos está relacionada com os conhecimentos matemáticos dos alunos que são utilizados para resolver problemas. As outras duas categorias de Schoenfeld (1985a), controlo e sistemas de crenças e afectos, não é alvo particular desta análise pois não me parece que a análise dos relatórios escritos e das transcrições das entrevistas seja particularmente vocacionada para obter, por si só, dados referentes a estas categorias. Para isso seria necessário uma entrevista onde cada aluno fosse questionado sobre a intencionalidade posta em cada decisão tomada durante a resolução de cada problema. Não é essa a orientação dada a este trabalho pelo que não serão analisadas estas duas categorias.

Finalmente, após a análise dos casos, é efectuada uma terceira fase de análise, mais geral e transversal, orientada pelas questões do estudo e enformada também pela teoria, a partir da qual é realizada a discussão final, que conduz às conclusões do estudo.

3.6. Questões éticas

A consistência de uma investigação interpretativa decorre, em grande medida, dos princípios éticos do investigador, dada a exigência de acesso a dados sobre as concepções, os significados e os valores expressos explícita ou implicitamente pelos sujeitos. Por isso, as questões éticas são, de acordo com Erickson (1986), uma responsabilidade do investigador que "deve andar a par com a preocupação científica numa investigação conduzida no campo" (p. 142).

Bogdan e Biklen (1994) referem o "consentimento informado" e a "protecção dos sujeitos contra qualquer espécie de danos" como normas a seguir na investigação com sujeitos humanos. Segundo os autores, tais normas tentam assegurar que: (i) os participantes são informados sobre os objectivos da investigação e dos perigos e obrigações nele envolvidos e aderem voluntariamente dando o seu consentimento informado antes do início da investigação; e (ii) as identidades dos participantes devem ser protegidas, para que a informação que o investigador recolhe não possa causar-lhes qualquer tipo de transtorno ou prejuízo.

As normas da AERA (2000), elaboradas especificamente para guiar o trabalho dos investigadores em educação, também referem que cabe ao investigador informar os participantes, logo no início do trabalho de campo, sobre os objectivos da investigação e as actividades que pretende realizar e tomar decisões no sentido de assegurar protecção aos indivíduos, garantindo a confidencialidade e o anonimato, pelo menos no meio exterior ao investigador. Acrescentam, ainda, que a honestidade deverá caracterizar as relações entre o investigador e participantes, levando-os a envolverem-se na investigação como colaboradores do projecto mas sem usar a sua influência sobre eles para os compelir a participar na investigação e garantindo-lhes o direito de desistirem da investigação em qualquer altura.

Neste estudo, existem questões éticas a considerar que assumem diferentes for-mas consoante o momento do trabalho de campo e do processo de investigação. Deste modo, as directrizes acima referidas são postas em prática também em diferentes fases deste estudo. No início do semestre informo os alunos sobre os objectivos da investigação e as actividades que pretendo realizar durante a experiência de ensino, solicitando a sua cooperação para este novo processo de ensino-aprendizagem e a sua disponibilidade para participar na investigação, enquanto voluntários. Informo, igualmente, qual o papel que lhes peço para desempenharem como participantes e solicito autorização para utilizar as aulas para recolher a informação necessária à investigação, que é concedida por todos os alunos. Além disso, explico-lhes a necessidade de seleccionar um número reduzido de alunos para estudar individualmente como casos, em entrevistas a realizar fora da sala de aula e solicito a sua disponibilidade para se voluntariarem para a investigação, garantindo-lhes: (i) tomar as precauções adequadas para que não tenham qualquer tipo de transtorno ou prejuízo em termos académicos; (ii) o direito de desistirem em qualquer altura; e (iii) a protecção da identidade, recorrendo à utilização de pseudónimos. Esta disponibilidade, indicada por alguns alunos no questionário inicial, é prova de consentimento informado.

No início do ano lectivo, são também solicitadas as autorizações previstas para a realização do estudo, ao nível institucional, aos superiores hierárquicos específicos: Director de Ensino da Escola Naval, Comandante da Escola Naval e Chefe do Estado Maior da Armada. Obtenho um parecer positivo, havendo, da minha parte, a garantia que o estudo é realizado nas condições propostas e que o mesmo decorre apenas da minha actividade lectiva nesta Escola. Não sendo exigido o anonimato da instituição, opto por não ocultar a sua identidade.

Na investigação educacional, os estudantes são uma população particularmente vulnerável porque o seu sucesso é parcialmente dependente das decisões tomadas pelos professores relativamente ao processo de ensino-aprendizagem (Pecorino, Kincaid & Gironda, 2008). Por isso, quando os educadores se envolvem na investigação do processo de ensino-aprendizagem, existem múltiplas formas de causar danos aos alunos que devem ser consideradas pois podem resultar na sua frustração e/ou numa reacção negativa à disciplina e ao seu conteúdo. Um dos aspectos que o investigador deve considerar é o de minimizar o uso de técnicas de investigação que possam ter consequências sociais negativas, por exemplo, privar os estudantes de partes importantes do currículo regulamentar (AERA, 2000). Neste estudo, embora só alguns temas programáticos sejam foco da realização de tarefas de investigação, a experiência de ensino abrange uma diversidade de aulas e todo o programa da disciplina de Análise Numérica.

Os investigadores também devem minimizar os efeitos de *designs* de investigação que dão vantagem a um grupo de participantes sobre outros (SERA, 2005). Estou consciente que, num contexto educativo em que o trabalho do investigador e do professor é desempenhado pela mesma pessoa, pode haver tendência para acompanhar mais de perto os alunos objecto de estudos de caso. Além disso, como indicam Pecorino, Kincaid e Gironda (2008), as mudanças nos métodos de ensino podem influenciar negativamente o desempenho académico dos alunos. Segundo estes autores, uma simples mudança que implique uma ênfase maior no trabalho de grupo e em apresentações individuais perante a turma, pode fazer com que alguns alunos enfrentem dificuldades e obtenham piores classificações do que as que habitualmente conseguem num formato de aulas expositivas e de resolução de exercícios. Por isso, durante as aulas, tento prestar igual atenção a todos os alunos, encorajando a sua participação e apoiando-os apropriadamente nas suas dificuldades de modo a que não se sintam academicamente prejudicados e/ou objecto de tratamento diferenciado em relação aos alunos estudados individualmente.

Outro aspecto decorrente do duplo papel de professora e investigadora está relacionado com as possíveis respostas 'institucionalmente correctas' dos alunos durante a investigação. Para evitar que estes respondam de acordo com aquilo que julgam ser a minha expectativa, durante a recolha de dados tomo algumas medidas, já referidas, para minimizar esse efeito. Por exemplo, o questionário final é respondido já depois de terminado o processo de avaliação dos alunos e de forma anónima, para que possam manifestar a sua opinião com toda a sinceridade, sem o receio de qualquer tipo de consequência negativa. Também durante as entrevistas, tenho o cuidado de informar os alunos que o objectivo não é verificar a correcção dos seus raciocínios nem a avaliação das suas aprendizagens e tento que as minhas expressões, movimentos e intensidade de voz não possam ser entendidos como sinais de aprovação ou reprovação, de modo a obter respostas naturais e francas da sua parte.

Quanto à integridade da investigação, as normas da SERA (2005) salientam a responsabilidade do investigador para com a comunidade científica no sentido de não cometer fraude, fabricando ou falsificando dados, evidências ou conclusões. Neste estudo, procuro apresentar os procedimentos, os dados, os resultados e as análises da investigação de forma precisa e suficientemente detalhada, utilizando com frequência excertos do trabalho dos próprios alunos, para permitir a sua compreensão e interpretação por parte de outros investigadores.

Por fim, segundo as normas da SERA (2005), todos os participantes têm direito a receber *feedback* sobre os resultados da investigação. Apesar deste aspecto estar garantido pelo carácter público deste documento, durante a realização da investigação também disponibilizo aos alunos cópias de algumas publicações com análises parciais dos dados resultantes da sua participação.

Capítulo 4

A experiência de ensino

Neste capítulo descrevo a experiência de ensino que serve de base a este estudo e apresento os elementos teóricos que sustentam a sua planificação. Começo por fazer referência ao contexto e aos aspectos gerais da disciplina onde se realiza a experiência. Depois, apresento uma visão geral da planificação da experiência de ensino, com destaque para as tarefas de natureza investigativa que lhe servem de base e termino com uma descrição sobre a avaliação dos alunos ao longo do semestre.

4.1. Contexto geral

A forma como um professor concebe uma disciplina e a sua aprendizagem, influencia grandemente a forma como a ensina. Essas concepções determinam não só o que o professor pretende que os estudantes adquiram como resultado do ensino, mas também o tipo de experiências que lhes tenta proporcionar nas suas aulas, as oportunidades de aprendizagem que lhes oferece, e o que valoriza no seu desempenho (Guimarães, 2003).

A minha experiência como docente tem-me levado a constatar que apesar dos esforços dos professores, muitos alunos encaram a Matemática como uma colecção de factos pré-estabelecidos, regras e técnicas que procuram memorizar de forma a responder às questões que lhes são colocadas nos momentos de avaliação. Isto é natural se atendermos à experiência que os alunos trazem do seu percurso escolar e ao modelo de aulas expositivas que prevalece nas universidades. De facto, o ensino da Matemática tem sido muito focado no cálculo, na memorização e na prática de resolução de exercícios. No entanto, a Matemática não se pode reduzir ao cálculo e a própria "memorização do que é essencial em Matemática é muito mais eficaz se se apoiar na compreensão de conceitos e das suas relações" (Ponte, 2008, p. 10). Além disso, segundo o mesmo autor, "com a memorização de elementos isolados, os alunos conseguem dar respostas «certas» a questões directas, mas não são capazes de responder a questões ligeiramente diferentes e rapidamente esquecem tudo o que pareciam ter aprendido" (p. 10).

Diversos autores têm referido a importância dos alunos resolverem problemas e explorarem situações problemáticas como contextos para aprender novos conceitos e procedimentos. Pólya (1980) aponta que se deve proporcionar aos alunos uma experiência matemática que se aproxime da actividade criativa dos matemáticos, enfatizando a resolução de problemas como essencial na actividade matemática. Esta perspectiva leva a ver o conhecimento matemático progredindo a partir de problemas, através de factos, conjecturas e refutações (Davis & Hersh, 1985). A aprendizagem da Matemática pode ter, assim, uma forte vertente investigativa, na qual a exploração, a descoberta de estratégias, a tentativa e o erro são processos que lhe estão inerentes e que se tornam indispensáveis à sua aprendizagem (Braumann, 2002). Neste sentido, Goldenberg (1999) defende a utilização de tarefas de investigação na aula de Matemática, levando os alunos a conjecturar, explorar conexões entre vários conceitos e matérias, descobrir processos de resolução e resultados e diversificar actividades. Santos et al. (2002) referem, igualmente, que um ensino que incide sobre a resolução de tarefas rotineiras é desajustado e consideram "importante que os alunos tenham oportunidades de fazer Matemática, particularmente através do trabalho com tarefas de natureza investigativa e exploratória" (p. 1). Além disso, a realização de tarefas de investigação, em diferentes níveis de ensino, parece influenciar a evolução das concepções dos alunos sobre a Matemática e suportar o desenvolvimento do seu raciocínio matemático (Ponte, 2007). Assim, parece ser consensual que os alunos devem aprender Matemática com compreensão, participando activamente, através da experiência, na construção do seu próprio conhecimento (NCTM, 2000).

As actuais recomendações sobre as mudanças nas práticas pedagógicas tão necessárias à melhoria do ensino da Matemática defendem que é "responsabilidade central dos professores [...] seleccionar e desenvolver tarefas significativas e materiais para criar oportunidades para os estudantes desenvolverem [...] compreensão, competência e interesse na Matemática" (NCTM, 1991, p. 24). Esta recomendação de se usar a resolução de problemas e a exploração de situações problemáticas no ensino e na aprendizagem da Matemática em diversos níveis de ensino (APM, 1988; NCTM, 2000) é alargada também para o ensino universitário (MAA, 2004, p. 1): "Todos os cursos devem incorporar actividades que ajudem o progresso de todos os estudantes no desenvolvimento do raciocínio analítico e crítico, da capacidade de comunicação e de resolução de problemas e na aquisição de hábitos de pensamento”.

A Análise Numérica constitui um domínio da Matemática propício a um ensino baseado na realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa. Tradicionalmente, esta disciplina usa uma abordagem na qual primeiro detalha as várias técnicas de análise numérica e depois usa-as em exercícios e/ou problemas-exemplo. No entanto, esta abordagem produz frequentemente estudantes que são muito versados em algoritmos e conseguem resolver a maior parte dos problemas, mas não compreendem o significado do que estão a fazer. No entanto, os conhecimentos matemáticos que os alunos já possuem podem servir de base ao seu trabalho nesta disciplina. Por um lado, a exploração e a análise de conceitos e procedimentos conhecidos dos alunos permitem definir critérios e tomar decisões para obter generalizações de métodos e técnicas que, por sua vez, dão origem a diversos métodos numéricos abordados nesta disciplina. Por outro lado, a realização de tarefas de exploração e investigação, tratando problemas práticos de aplicação com a discussão dos métodos e técnicas pelos quais esses problemas podem ser resolvidos numericamente, é uma abordagem que se adequa muito bem ao que os estudantes realmente fazem quando têm que aplicar métodos numéricos em novas áreas e na sua vida profissional.

Com base nestes pressupostos e considerando o enquadramento teórico referido e o objectivo do estudo, afigura-se pertinente delinear uma experiência de ensino apoiada na realização de tarefas de investigação numa disciplina como a Análise Numérica, tendo em vista a aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos e o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. O objectivo desta experiência de ensino é criar um ambiente de aprendizagem ‘rico’ na sala de aula, que estimule os alunos a empenharem-se numa tentativa genuína de ‘dar significado’ à Matemática, tal como os matemáticos fazem.

4.2. A disciplina de Análise Numérica

Aspectos gerais da disciplina

Muitos dos problemas de Matemática não podem ser resolvidos através de fórmulas ou numa sequência finita de operações elementares. Nestes casos, é necessário recorrer a algoritmos que convergem para soluções 'aproximadas' e que, para uma aplicação científica ou de engenharia, podem ser tão boas como as exactas.

Basicamente, um método numérico é um conjunto ordenado de operações aritméticas e lógicas, fundamentado em teoremas da Análise Matemática, que conduz à solução numérica aproximada de um problema matemático cuja solução analítica exacta não está disponível ou é inapropriada. A um método numérico está pois associado um algoritmo. A construção de métodos numéricos, a escolha apropriada destes métodos para a resolução de um determinado problema, a sua correcta aplicação e a estimação dos erros associados às soluções encontradas de forma a julgar qual o nível de fiabilidade dessas soluções, constitui o campo da Análise Numérica. Mas a Análise Numérica vai para além do simples processo de execução de algoritmos.

O grande desenvolvimento deste ramo da Matemática nas últimas décadas está fortemente ligado à evolução e, sobretudo, à vulgarização dos computadores e das máquinas de calcular, ferramentas base de trabalho para longos e fastidiosos cálculos com números que à mão são virtualmente impossíveis de realizar. O aparecimento dos computadores possibilita a realização de cálculos numéricos, no passado humanamente impossíveis, o que tem como reflexo o desenvolvimento de novos métodos numéricos e a adaptação dos métodos já existentes à nova realidade. Desde então, a Análise Numérica desenvolve-se como ramo bem definido da Matemática contribuindo para a resolução dos mais variados problemas.

Para escolher entre vários métodos numéricos o mais indicado à resolução de um determinado problema, devemos saber como estes se deduzem e, por conseguinte, os seus domínios de aplicação e suas limitações. Se vários métodos numéricos conduzem à resolução de um dado problema, pode não ser indiferente a escolha de um deles. Nestes casos devem ser feitas as respectivas análises de erros e/ou utilizar critérios computacionais que podem ser decisivos na escolha do método a usar, tais como a maior rapidez de execução, a menor ocupação da memória e a menor complexidade computacional.

Os factos expostos têm assim reflexos na estrutura de disciplinas introdutórias à Análise Numérica. Esta disciplina pretende responder às necessidades dos currículos dos cursos da Escola Naval, permitindo uma introdução aos métodos numéricos orientados para as aplicações. Virtualmente, todos os estudantes destes cursos usam métodos numéricos para resolver problemas científicos e de engenharia durante os seus estudos e/ou desempenhos profissionais. Pretende-se com esta disciplina que os alunos conheçam vários métodos numéricos, apliquem esses métodos e saibam escolher entre eles o mais adequado a um problema. Uma vez que já existe software disponível, a disciplina enfatiza as aplicações de ciência e engenharia que usam métodos numéricos.

Temas programáticos

O programa da disciplina (Anexo 3) resulta da minha experiência na docência de Análise Numérica dos cursos tradicionais da Escola Naval e nela são abordados a maioria dos temas que habitualmente são incluídos num curso introdutório a esta disciplina. No entanto, dada a vastidão da Análise Numérica, este programa não inclui muitos temas, sob pena de ter de tratar superficialmente os assuntos, e também porque alguns deles requerem conhecimentos ainda não adquiridos pelos alunos. Assim, para os assuntos escolhidos bastam conhecimentos de Análise Matemática, Álgebra Linear e prática de Programação.

Os assuntos a leccionar distribuem-se por seis capítulos. A análise de erros é um assunto transversal a todos os temas a abordar pelo que é abordada logo no capítulo 1. A escolha da teoria dos erros como capítulo 1, onde se inclui a aritmética do computador e intervalar, justifica-se, dado que os métodos numéricos são para implementar no computador e os resultados obtidos por esses métodos vêm afectados de erros que é necessário controlar. No capítulo 2, abordam-se os métodos de resolução de equações não lineares por várias razões. Em primeiro lugar, de todos os métodos numéricos, os de resolução de uma equação não linear são, sem dúvida, dos mais atraentes para os alunos, justificando assim a sua localização no início do programa. O seu estudo leva os alunos a familiarizarem-se desde o início com métodos iterativos e noções com eles relacionadas, tais como convergência, critério de paragem, precisão dos resultados, eficiência computacional, comparação de métodos, etc. Os métodos iterativos mais elementares são de fácil implementação no computador, e portanto, do ponto de vista pedagógico, é vantajoso abordá-los o mais cedo possível. Os capítulos 3 e 4 são dedicados à teoria da aproximação. A interpolação polinomial é estudada no capítulo 3 e o ajustamento de funções utilizando o critério dos mínimos quadrados no capítulo 4. Os capítulos 5 e 6 que tratam, respectivamente, do cálculo integral e da resolução de equações diferenciais, baseiam-se fundamentalmente na interpolação polinomial, fazendo também uso de assuntos dos restantes capítulos. Relativamente aos assuntos escolhidos, faço de seguida uma breve descrição de cada capítulo.

Capítulo 1 – Números e erros. Este capítulo é fundamental na Análise Numérica, pois um dos seus objectivos mais importantes é conseguir uma quantificação do erro cometido ao calcular um valor aproximado. Nele são definidos os conceitos de erro e outros conceitos associados, com especial destaque para a quantificação dos erros de arredondamento na realização de cálculos 'à mão' e nos instrumentos de cálculo, tendo em conta as suas limitações, bem como os chamados erros de truncatura associados aos algoritmos. O objectivo da aritmética intervalar é a resolução de problemas numéricos, determinando limites garantidos para a sua solução, definidos por um intervalo. É importante que o aluno se integre nesta visão dinâmica do intervalo cuja ideia essencial é que, no trabalho com valores aproximados, o intervalo [a,b] representa um número. O capítulo encerra com a análise de propagação dos erros, assunto de grande aplicação prática, ao qual é dado o desenvolvimento compatível com a sua importância.

Capítulo 2 – Equações não lineares. No currículo tradicional, as equações mais complicadas que podem ser resolvidas analiticamente são as quadráticas e alguns casos especiais onde as manipulações simbólicas não são muito difíceis (tais como factorização de polinómios de ordem mais elevada ou equações simples envolvendo expressões trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais). Desta forma, a maior parte dos alunos tem a ideia que a solução de um problema envolve sempre uma operação directa. Num currículo moderno, que integre o computador como ferramenta de trabalho, a resolução de equações pode ser feita por tentativa e erro, desenvolvendo técnicas de busca/procura mais poderosas ou por iteração. Isto conduz a uma sequência de estádios essenciais no desenvolvimento de métodos numéricos. Primeiro, surgem métodos exploratórios – investigações e adivinhas inspiradas – que se podem usar para obter uma ideia da natureza do cálculo requerido. Depois, procura-se um método de solução simples mas efectivo que pode ser lento mas segue uma linha claramente compreensível de desenvolvimento. Finalmente, tenta-se uma mudança para um método mais poderoso, usando refinamentos teóricos subtis, que produz um resultado mais rápido e exacto. Os métodos gráficos são também uma ferramenta muito utilizada neste capítulo, pelo que se revê e comenta alguns pontos interessantes relacionados com o traçado de gráficos de funções reais de variável real.

Capítulo 3 – Interpolação polinomial. Neste capítulo são estudados alguns algoritmos relacionados com a representação, manipulação e o cálculo de polinómios. Os métodos de interpolação são a base para muitos outros procedimentos a estudar em capítulos seguintes. Este capítulo descreve os métodos mais eficientes para construir polinómios interpoladores e obter valores interpolados.

Capítulo 4 – Ajuste de funções. Este capítulo estuda os métodos numéricos para aproximação de funções, baseados em técnicas de interpolação e na minimização de normas. Uma situação bem comum em todas as ciências que trabalham com valores numéricos é a necessidade de interpretar e tratar dados, experimentais ou não, organizados em pares (x_i,y_i), de modo a estabelecer uma relação funcional aproximada entre duas variáveis, a função de ajustamento ou de aproximação aos valores tabelados.

Capítulo 5 – Integração numérica. O problema da integração numérica vem desde Gauss e Newton. As fórmulas clássicas de integração são derivadas da ideia de interpolação de $n + 1$ pontos por um polinómio de grau n, depois integrar exactamente o polinómio. Pontos de interpolação igualmente espaçados dão as fórmulas de Newton-Côtes, as quais são úteis para pequenos graus mas divergem a uma razão muito alta quando n tende para infinito. Se os pontos são escolhidos optimamente, então o resultado é a quadratura Gaussiana, que converge rapidamente e é numericamente estável. Esses pontos óptimos são as raízes dos polinómios de Legendre que estão mais aglomerados perto dos pontos extremos.

Capítulo 6 – Equações Diferenciais Ordinárias. Este capítulo trata a utilização destas técnicas de integração numérica para a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias. Por volta de 1850 outro problema de análise começou a chamar a atenção: a solução de equações diferenciais ordinárias (ODEs). As fórmulas de Adams são baseadas na interpolação polinomial em pontos igualmente espaçados os quais na prática são em número inferior a 10. Este é o primeiro do que chamamos métodos multi-passo para a solução numérica de ODEs. A ideia aqui é que para um problema de valor inicial $u' = f(t,u)$ com variável independente $t > 0$, tomamos um pequeno passo de tempo $\Delta t > 0$ e consideramos um conjunto finito de valores de tempo $t_n = n\,\Delta t$, $n \geq 0$. Substituímos então a ODE por uma aproximação algébrica que nos permite calcular uma sucessão de valores aproximados $v^n \approx u(t_n)$, $n \geq 0$. A fórmula mais simples de aproximação é de Euler e é dada por $v^{n+1} = v^n + \Delta t\, f(t_n,v^n)$. As fórmulas de Adams são generalizações de ordem superior da fórmula de Euler que são muito mais eficientes a gerar soluções exactas. Infelizmente, o hábito na literatura de Análise Numérica é falar não em convergência dos métodos mas do seu erro, ou seja, mais precisamente no seu erro de discretização ou truncamento como distinto do erro de arredondamento. No final do séc.

XX, a segunda grande classe de algoritmos de ODE, conhecidos como Runge-Kutta ou métodos de passo simples são desenvolvidos por Runge, Heun e Kutta. Estes métodos tendem a ser de mais fácil implementação mas muitas vezes são mais difíceis de analisar do que os métodos multi-passo.

O quadro 4.1 indica os tópicos a abordar em cada capítulo e descreve os seus objectivos específicos e os conceitos e procedimentos a abordar. Observa-se que a maioria dos conceitos faz parte dos conteúdos programáticos tratados em disciplinas prévias, sobretudo na Análise Matemática. A ênfase está, pois, nos novos procedimentos (métodos numéricos) baseados nos conhecimentos prévios dos alunos.

4.3. Planificação da experiência de ensino

A planificação de uma experiência de ensino tem que ter em consideração diversos factores que a podem influenciar. Segundo Kraemer (2008, p. 5), o professor tem que:

> (i) determinar o que é que os alunos podem aprender num determinado momento, a partir daquilo que eles já sabem e já fazem (conteúdos matemáticos a aprender); (ii) seleccionar e/ou criar actividades e tarefas e encadeá-las umas nas outras de tal maneira que os alunos possam atingir os objectivos que o professor fixou para eles; e (iii) explicitar aquilo que os alunos vão descobrir/aprender nestas condições e como o vão fazer (aspecto teórico e metodológico da planificação).

Além disso, muitas vezes existem diversas estratégias de ensino potencialmente adequadas ao que se pretende e, deste modo, “cabe ao professor conhecer as alternativas disponíveis e conhecer-se a si próprio, sabendo até que ponto é capaz de usar com confiança e desembaraço cada uma delas” (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997, p. 95). Mas a experiência adquire-se experimentando e reflectindo. Por isso, a experiência de ensino anteriormente realizada (Henriques, 2006) constitui, para mim, uma excelente oportunidade de aprender. Os resultados positivos dessa experiência e a reflexão sobre as limitações constatadas sugerem que os conteúdos programáticos da Análise Numérica podem ser abordados por um conjunto de tarefas de investigação, constituindo um factor facilitador da organização do processo de ensino-aprendizagem desta disciplina. Deste modo, esse trabalho de investigação contribuiu para o planeamento da experiência de ensino que agora apresento, em particular em relação ao ambiente de trabalho na sala de aula e à natureza das tarefas a propor aos alunos.

Quadro 4.1 (continua)
Resumo dos objectivos específicos e conteúdos programáticos a abordar

	TEMAS	OBJECTIVOS ESPECÍFICOS	CONCEITOS	PROCEDIMENTOS
Cap. 1	Números Erros Aritmética intervalar	• Identificar as principais fontes de erros numéricos; • Descrever as dificuldades que surgem na precisão dos resultados de calculos devido à utilização dos computadores; • Definir os conceitos de erro, estabilidade e precisão da máquina e inexactidão das aproximações computacionais; • Identificar propriedades dos números reais; • Explicar e compreender como é que essas propriedades afectam o resultado das operações com intervalos de números reais; • Efectuar cálculos com intervalos de números reais; • Deduzir regras para as operações elementares utilizando intervalos de números reais; • Explicar e demonstrar alguma teoria importante sobre a aritmética intervalar.	Erros e outros conceitos associados; Algoritmo; Algarismo relevante e significativo. Intervalo; Operação com intervalos.	Cálculo de erros; Operações intervalares; Propagação de erros; FFCE.
Cap. 2	Equações não lineares	• Construir e interpretar tabelas e gráficos relativos a funções não lineares; • Calcular a raiz de uma equação não linear; • Deduzir métodos de resolução de equações não lineares; • Aplicar os métodos dados para resolver uma equação não linear; • Compreender as diferenças entre vários métodos e aplicar os conhecimentos na escolha do mais apropriado a cada situação; • Encontrar formas de quantificar os erros associados a estes métodos; • Explicar e demonstrar alguma teoria importante sobre equações não lineares.	Equação não linear; Método iterativo; Solução aproximada.	Determinação valor aproximado de uma raiz; Determinação do erro associado à solução.
Cap. 3	Interpolação polinomial	• Contruir polinómios interpoladores para um conjunto de dados; • Construir e interpretar diferentes tabelas na construção dos polinómios; • Compreender as diferenças entre vários métodos e aplicar os conhecimentos na escolha do mais apropriado a cada situação; • Encontrar formas de quantificar os erros associados a estes polinómios; • Encontrar diferentes formas de majorar o erro da interpolação.	Polinómio interpolador; Diferença dividida e finita; Erro da interpolação.	Determinação de polinómios interpoladores e erros associados.

Quadro 4.1 (continuação)
Resumo dos objectivos específicos e conteúdos programáticos a abordar

	TEMAS	OBJECTIVOS ESPECÍFICOS	CONCEITOS	PROCEDIMENTOS
Cap. 4	Ajuste de curvas	• Encontrar ajustamentos aos dados através do método dos mínimos quadrados usando famílias de funções lineares e não lineares; • Utilizar gráficos e tabelas para identificar o comportamento de conjuntos de dados; • Descrever o comportamento de um conjunto de dados utilizando modelos matemáticos; • Compreender a utilização do método dos mínimos quadrados e as suas vantagens relativamente a outros métodos; • Deduzir o método dos mínimos quadrados para ajustar diferentes modelos; • Relacionar parâmetros do modelo com erros associados.	Função.	Método dos mínimos quadrados; Regressão linear e polinomial; Linearização de funções.
Cap. 5	Integração numérica	• Executar integração numérica e análise de erros; • Calcular o valor de um integral, usando vários métodos de integração; • Deduzir diferentes regras numéricas para o cálculo integral; • Relacionar o valor do integral com a regra utilizada para o seu cálculo; • Explicar e demonstrar alguma teoria importante sobre métodos de integração; • Compreender a variação do erro cometido na utilização das diferentes fórmulas desenvolvidas; • Compreender as diferenças entre os métodos e aplicar esses conhecimentos na escolha do mais apropriado a cada situação.	Integral de Riemann.	Determinação do valor de um integral e erro associado.
Cap. 6	ODE's	• Encontrar soluções numéricas de eqs. Diferenciais; • Compreender como é que os métodos de passo múltiplo são deduzidos e aplicá-los para resolver problemas; • Compreender as vantagens e desvantagens dos métodos de passo simples e multipasso e quando é que o seu uso é recomendado; • Descrever o que significa os termos convergência e estabilidade no contexto da solução de ODE's; • Explicar a possível instabilidade dos métodos multi-passo.	Equação diferencial; Solução da equação diferencial; PVI; Convergência; Estabilidade.	Determinação da solução de ODE's num conjunto finito de pontos; Determinação do erro associado.

A experiência de ensino do presente estudo é planeada tendo em conta o plano anual de actividades escolares definido pela Escola Naval e o horário atribuído à disciplina. Realiza-se, como previsto, em duas turmas do 2.º ano dos cursos de mestrado integrado conferidos pela Escola Naval (Marinha, Administração Naval, Engenharia Mecânica, Engenharia de Armas e Electrónica e Fuzileiros), às quais lecciono a disciplina de Análise Numérica, durante o 1.º semestre do ano lectivo de 2008/09, e visa promover a aprendizagem de conceitos e métodos fundamentais de Análise Numérica através de uma abordagem de natureza investigativa. Isto requer consideráveis modificações na organização das aulas, exigindo uma acção docente diferenciada da tradicionalmente praticada e a introdução de tarefas específicas muito diferentes dos exercícios rotineiros de aplicação da matéria dada que caracterizam a aula tradicional.

Uma parte significativa das aulas do semestre é utilizada para a realização de quatro tarefas de exploração/investigação relacionadas com diversos tópicos programáticos da disciplina (cujo planeamento e descrição faço mais à frente). Os alunos são confrontados com problemas para os quais não têm teoria nem modelo para fazerem um tratamento completo, pelo que são desafiados a desenvolver e defender as suas próprias estratégias. A realização de cada uma das tarefas propostas aos alunos envolve quatro fases, três das quais em sala de aula: a introdução da tarefa, a exploração da tarefa e a apresentação das conclusões dos alunos e sua discussão (Ponte et al., 1998).

A minha experiência como docente, o meu trabalho anterior (Henriques, 2006) e outros trabalhos realizados por diversos autores, especificamente na área do ensino da Matemática, evidenciam bem as vantagens do trabalho em grupo na concretização dos objectivos pretendidos com alunos do ensino superior (Henriques & Ponte, 2008; Schoenfeld, 1985a). Desta forma, os alunos têm o seu espaço para pensar, discutir, errar e corrigir. Num ambiente de aprendizagem em grupo, os alunos superam em conjunto, e mais facilmente, as dificuldades. As tarefas desenvolvidas a pares e em grupo pretendem criar oportunidades para os alunos exporem as suas ideias, ouvirem as dos seus colegas, discutirem estratégias e soluções, argumentarem e criticarem os diferentes argumentos. Este modo de trabalho permite melhorar a confiança dos alunos no trabalho em Matemática e pretende facilitar a comunicação entre os elementos do grupo, entre o grupo e a professora e até entre os grupos. Assim, após a distribuição dos enunciados das tarefas, apresentados na forma escrita, opto por dar primazia ao trabalho de grupo e, durante a fase de exploração das tarefas, os alunos trabalham em pares ou em pequenos grupos.

Um outro aspecto importante, apontado por vários autores, é o da reflexão após uma actividade matemática (Ponte, 2003). Este é sem dúvida, um momento favorável à apreensão e consolidação de novos conhecimentos. Além disso, o resultado de um trabalho de natureza investigativa torna-se sempre mais significativo valioso quando partilhado com outros. É provável que tal comunicação possa gerar pedidos de maior clarificação da audiência, o que pode conduzir o apresentador a identificar limitações e assuntos que merecem uma maior exploração. Por isso, no final da exploração de cada tarefa, os alunos apresentam oralmente, à turma, o trabalho desenvolvido. Deste modo, as tarefas de investigação promovem a comunicação, fornecem a base para a aprendizagem de conceitos e procedimentos da disciplina por parte dos alunos e permitem conhecer as suas estratégias de raciocínio. Estes momentos são também aproveitados por mim para esclarecer dúvidas, para questionar os alunos acerca da compreensão dos procedimentos dos colegas e para pedir que expliquem o seu raciocínio de modo a perceber como é que os alunos constroem os significados matemáticos (Ponte, 2005).

Enquanto a apresentação oral e a discussão em grande grupo parecem ser o caminho mais adequado à troca de ideias, é também importante perceber o potencial da escrita na comunicação das ideias, questões e resultados da sala de aula (Borasi, 1992). Segundo Leal (1992), os relatórios escritos privilegiam alguns aspectos relacionados com o conhecimento e a compreensão de conceitos e processos e com o desenvolvimento de capacidades como a interpretação, a reflexão, a exploração de ideias matemáticas e o espírito crítico. Além disso, contribuem para o desenvolvimento da comunicação escrita. Dias (2005) refere, ainda, que a realização de um relatório escrito sobre o trabalho desenvolvido na sala de aula pelos alunos incentiva a reflexão, uma vez que faz apelo à articulação de ideias, à explicação de procedimentos, à análise crítica dos processos utilizados e dos resultados obtidos.

Não é habitual, sobretudo nas disciplinas de Matemática, solicitar aos alunos a realização de relatórios escritos da sua actividade na sala de aula. No entanto, com a diversidade de tarefas que os professores começam a propor aos alunos na sala de aula, em particular as tarefas de natureza mais exploratória e investigativa, vários modelos de relatório têm sido usados: feitos individualmente ou em grupo e dentro ou fora da sala de aula (Santos et al., 2002). Todas estas modalidades têm as suas potencialidades, cabendo ao professor escolher a que melhor se ajusta ao contexto e aos objectivos definidos.

Ao longo desta experiência de ensino, no final da exploração de cada tarefa e antes da sua discussão em grande grupo realizada na aula seguinte (geralmente com dois dias de intervalo), os alunos são solicitados a escreverem um relatório em grupo, explicando as estratégias que utilizam e apresentando e justificando as suas conclusões. Varandas (2000) refere algumas vantagens na realização dos relatórios na sala de aula. Por um lado, permite ao aluno recorrer ao professor sempre que sente dificuldades e, por outro lado, permite que este observe o aluno durante a sua realização, uma vez que este trabalho escrito nem sempre reflecte a riqueza da exploração da tarefa realizada. Porém, opto por realizar os relatórios das tarefas em período extra-lectivo pois o número de horas lectivas disponíveis é insuficiente para a sua realização na sala de aula. No entanto, tento minimizar os efeitos desta opção, relativamente aos aspectos referidos, estando disponível para esclarecer dúvidas mesmo em períodos extra-lectivos e observando o trabalho dos alunos durante as fases de exploração e discussão das tarefas. Além disso, os alunos têm mais tempo para elaborar os relatórios quando estes são realizados fora da sala de aula (Leal, 1992). A opção pelo trabalho em grupo na escrita dos relatórios está relacionada com a escolha deste documento também como instrumento de avaliação, como refiro adiante. De facto, comentar os relatórios individuais de todos os alunos origina um volume de trabalho a que não é possível dar resposta, em tempo útil.

Considerando a importância da diversificação de tarefas na aprendizagem (Ponte, 2005) e visando a consolidação de conhecimentos adquiridos, as tarefas não são realizadas de modo consecutivo mas alternadas com outras aulas que contemplam exposições teóricas dos conteúdos programáticos previstos na planificação da disciplina, alguns dos quais trabalhados durante as tarefas de investigação e que, ao mesmo tempo, são úteis na concretização da experiência. A planificação inclui, igualmente, oportunidades para a resolução de problemas e de exercícios de aplicação. Os exercícios e os problemas escolhidos têm diferentes níveis de dificuldade e são elaborados por mim ou adaptados de outros documentos (por exemplo, do manual adoptado para a disciplina, Santos (2002)), permitindo aos alunos pôr em prática os conhecimentos que vão adquirindo e conduzindo a uma melhor compreensão dos conceitos.

No Anexo 4 apresento a sequência de actividades realizadas na disciplina, ao longo do semestre.

4.4. Planificação das tarefas

A planificação e a preparação das tarefas a realizar na sala de aula requerem, da parte do professor, um trabalho cuidadoso para que estas sejam apropriadas aos objectivos a atingir. Na verdade, a selecção de tarefas é tão importante como a forma como estas são exploradas na sala de aula. O envolvimento pessoal do professor na selecção ou construção das tarefas é um passo fundamental na planificação para a sua apresentação na aula, uma vez que a sua função não deve ser só motivar os alunos para a actividade numa tarefa seleccionada, mas seleccionar tarefas que motivem os seus alunos para a actividade (Azevedo, 2009). Segundo o NCTM (1994), quando o professor selecciona, adapta ou constrói as tarefas a propor aos alunos deve ter em atenção três aspectos importantes: "(i) o conteúdo matemático; (ii) os alunos; e (iii) as suas formas de aprendizagem" (p. 28).

Com base no meu entendimento de tarefa e de actividade de investigação, de acordo com o referido em Ponte e Serrazina (2000), elaboro um conjunto de enunciados escritos que são propostos aos alunos como ponto de partida para a sua actividade matemática. Opto por construir novas tarefas, em vez de utilizar as propostas aos alunos no meu estudo anterior (Henriques, 2006), de modo a ajustarem-se melhor aos novos objectivos e à análise dos aspectos do raciocínio agora considerados. Estas novas tarefas, de natureza essencialmente exploratória e investigativa, são elaboradas por mim com a finalidade de serem usadas nesta experiência de ensino de modo a promover nos alunos a aprendizagem de conceitos e procedimentos de Análise Numérica e o desenvolvimento de capacidades transversais da Matemática explicitadas em documentos oficiais, como o raciocínio matemático, a resolução de problemas, a comunicação e as conexões entre as várias áreas da Matemática (AMATYC, 2006; APM, 1998; MAA, 2003; NCTM, 1994).

Inicio a elaboração das tarefas de investigação com o planeamento de cada uma relativamente ao assunto que pretendo trabalhar e com que ênfase. Opto por tarefas com uma relação estreita com os temas programáticos específicos e os objectivos da disciplina. Deste modo, os conceitos e algoritmos de Análise Numérica fornecem o contexto para o estudo. Este aspecto é fundamental para o planeamento das actividades lectivas, apresentadas no anexo 4, no que diz respeito aos temas programáticos a abordar e à sua distribuição ao longo dos tempos lectivos disponíveis durante o semestre. Deste modo, são elaboradas quatro tarefas:

Tarefa 1 - Intervalando, relacionada com a aritmética intervalar;

Tarefa 2 - Equacionando, abordando a temática das equações não lineares;

Tarefa 3 - Ajuste de contas, focalizada no ajuste de funções;

Tarefa 4 - Águas paradas, inserida no domínio do cálculo integral.

Seleccionado o assunto que serve de base a cada tarefa é necessário preparar um enunciado com o respectivo ponto de partida, que permita ao estudante iniciar o trabalho de exploração. Depois, é necessário estimulá-lo a experimentar e a criar estratégias de resolução. Desta forma, tento levar o aluno a generalizar resultados matemáticos conhecidos ou a considerar outras possibilidades que ampliam o seu olhar sobre o tópico, acrescentando aspectos novos e criando conexões.

As quatro tarefas de exploração e investigação utilizadas nas aulas durante o período de intervenção têm uma estrutura idêntica cujo objectivo é ajudar os estudantes a ultrapassar as muitas dificuldades intrínsecas ao envolvimento em explorações abertas. O grau de estruturação de uma tarefa, verbal ou escrita, é um aspecto crucial para o seu sucesso. Por isso, é um assunto considerado na sua elaboração. A definição do nível de estruturação adequado para uma tarefa de investigação é sempre dependente do grau de maturidade matemática dos alunos e das experiências anteriores dos alunos e do professor na realização deste tipo de tarefa. Este aspecto deve ser considerado na fase de concepção da tarefa e não deve constituir, por si só, um factor para avaliar a qualidade de uma investigação (Porfírio & Oliveira, 1999). É provável que as experiências matemáticas fornecidas pela escolaridade anterior façam com que os alunos tenham pouca confiança na sua capacidade de envolvimento em investigação matemática (Borasi, 1992). Assim, é necessário garantir que as tarefas são apropriadas para todos os alunos e não só para alguns, pelo que as suas aptidões, interesses e conhecimento da Matemática são também factores a ter em conta na escolha dos temas a abordar e na elaboração das tarefas: "As boas tarefas são aquelas que não separam o pensamento matemático dos conceitos matemáticos ou aptidões, que despertam a curiosidade dos alunos e que os convidam a especular e a aprofundar as suas intuições" (NCTM, 1991, p. 27). Algumas das questões encontradas nas tarefas deste estudo orientam o trabalho dos alunos para que eles não se sintam perdidos e identifiquem um conjunto de 'coisas a fazer'. Esta característica é favorável aos alunos, especialmente nas primeiras tarefas, quando ainda não estão familiarizados com este tipo de trabalho (Henriques, 2006).

Segundo Ponte et al. (1998) é essencial que na selecção das tarefas propostas o professor estabeleça objectivos, de acordo com a especificidade da turma e com o contexto em que surgem na aula. Todas as tarefas elaboradas fazem um apelo à descoberta matemática e têm objectivos de carácter geral comuns. Assim, para além dos objectivos relacionados com a utilização de conceitos e procedimentos de Análise Numérica, as tarefas propostas têm ainda outros objectivos relacionados com: (i) reconhecer num problema as questões de natureza específica da Matemática; (ii) estabelecer conexões com situações do dia-a-dia em que utilizem o mesmo tipo de raciocínio matemático; (iii) estabelecer conexões entre tópicos da Matemática; e (iv) compreender o significado de conceitos e métodos e utilizá-los na resolução de situações problemáticas. Relativamente aos assuntos escolhidos, cada tarefa tem ainda objectivos específicos que estão indicados no Quadro 4.2.

Pela sua natureza, as tarefas pretendem, ainda, proporcionar aos alunos a vivência de processos característicos da Matemática, como sejam a formulação de questões e de conjecturas, a realização de testes e refutações, a apresentação e discussão dos seus resultados e a argumentação e fundamentação das suas ideias. Além disso, a maioria das tarefas incluem, no seu enunciado, uma última questão que propõe a resolução de um problema. Esta questão, tem como objectivo permitir que os alunos utilizem estratégias variadas enquanto percorrem as etapas que estão subjacentes à resolução de problemas. Pretende, igualmente, analisar se os alunos são capazes de tranferir o seu trabalho recente para uma situação matemática diferente das que são cobertas nas questões anteriores de natureza mais exploratória e investigativa. Do trabalho de planeamento resulta, então, um conjunto de quatro tarefas de investigação a propor aos alunos durante a experiência de ensino, apresentadas e descritas no capítulo seguinte e cujos enunciados se encontram no Anexo 5.

4.5. A avaliação e classificação dos alunos

Quando se assume determinada metodologia de ensino-aprendizagem é necessário equacionar o tipo de avaliação a seguir. O que se pretende medir numa situação de avaliação deve estar, tanto quanto possível, relacionado com os objectivos da disciplina. O uso de uma forma de avaliação apropriada é importante, não só para avaliar os estudantes com justiça, mas também como modo de lhes comunicar os aspectos que mais valorizamos no seu trabalho.

Quadro 4.2
Resumo dos objectivos específicos e conteúdos programáticos a abordar nas tarefas elaboradas

TAREFA	OBJECTIVOS ESPECÍFICOS DA TAREFA	TEMAS
Tarefa 1	• Identificar propriedades dos números reais; • Explicar e compreender como é que essas propriedades afectam o resultado das operações com intervalos de números reais; • Efectuar cálculos com intervalos de números reais; • Deduzir regras para as operações elementares utilizando intervalos de números reais; • Explicar e demonstrar alguma teoria importante sobre a aritmética intervalar.	Aritmética intervalar
Tarefa 2	• Construir e interpretar tabelas e gráficos relativos a funções não lineares; • Calcular a raiz de uma equação não linear; • Deduzir métodos de resolução de equações não lineares; • Encontrar formas de quantificar os erros associados a estes métodos; • Explicar e demonstrar alguma teoria importante sobre equações não lineares.	Equações não lineares
Tarefa 3	• Utilizar gráficos e tabelas para identificar o comportamento de conjuntos de dados; • Explorar, descrever e generalizar relações entre números; • Descrever o comportamento de um conjunto de dados utilizando modelos matemáticos; • Compreender a utilização do método dos mínimos quadrados e as suas vantagens relativamente a outros métodos; • Deduzir o método dos mínimos quadrados para ajustar diferentes modelos; • Relacionar parâmetros do modelo com erros associados.	Ajuste de funções
Tarefa 4	• Deduzir regras numéricas para o cálculo integral; • Calcular o valor aproximado de um integral, usando vários métodos de integração; • Relacionar o valor do integral com a regra utilizada para o seu cálculo; • Explicar e demonstrar alguma teoria importante sobre métodos de integração; • Compreender a variação do erro cometido na utilização das diferentes fórmulas desenvolvidas.	Integração numérica

De uma forma generalizada, os professores são confrontados com a obrigatoriedade de classificar os alunos e estes conduzem a sua aprendizagem no sentido de passar nos exames:

> [Os alunos] aprendem que passar nos exames é muito mais importante que saber e ter curiosidade intelectual ou motivação pelo conhecimento; (…) aprendem que, se se tornam demasiado visíveis ou protestam em excesso, estarão sujeitos a um maior controlo classificatório; aprendem

> que se tiverem sorte, poderão passar sem esforço; aprendem, em suma, um conjunto de truques que nada têm a ver (…) com a educação. (Navas, 2008, p. 46)

No entanto, actualmente, a avaliação da aprendizagem é considerada um processo sistemático e contínuo cuja principal função é ajudar a melhorar a formação dos alunos. Como refere Santos (2002), a avaliação tem assumido, cada vez mais, uma função pedagógica como elemento regulador no processo de ensino-aprendizagem permitindo, quer ao professor quer ao aluno, acompanhar esse processo, detectando erros, falhas e verificando em que medida os objectivos definidos são atingidos. Esta perspectiva da avaliação contrasta com a necessidade pontual de verificar o conhecimento para atribuição de uma classificação e com a realidade vivida nos nossos estabelecimentos de ensino, sobretudo nas universidades onde o exame final é o instrumento de avaliação mais comum. Desta forma, o principal objectivo da avaliação não é só medir o conhecimento que o estudante adquire durante a sua frequência da disciplina, mas pode ter outras finalidades. A formalização da avaliação da aprendizagem, através de instrumentos adequados, permite ao professor obter as informações necessárias sobre a evolução das aprendizagens dos alunos e a forma como estão a ser atingidos os objectivos da disciplina e a detectar possíveis lacunas que precisem de ser ultrapassadas. Pode também ser vista como mais uma oportunidade de aprendizagem e permitir aos alunos um melhor controlo da sua própria aprendizagem.

Ao longo da experiência de ensino, as actividades de aprendizagem são essencialmente de dois tipos: a realização de tarefas de exploração/investigação para introduzir novos conceitos ou para aplicar conceitos estudados e aulas de exposição de matéria e de resolução de problemas e exercícios práticos. Por isso, considero importante diversificar as técnicas e os instrumentos de avaliação de forma a contemplar as diferentes vertentes de trabalho desenvolvido nas aulas e a natureza das aprendizagens e dos contextos em que ocorrem.

As investigações são actividades de aprendizagem e, como tal, devem ser avaliadas (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). A realização, pelos alunos, de tarefas de investigação coloca então a questão de saber como os avaliar. A avaliação de um trabalho investigativo requer abertura da parte do professor para integrar no seu sistema de avaliação diferentes instrumentos que permitam avaliar as capacidades do aluno na realização deste tipo de tarefas. Tratando-se de uma actividade matemática complexa, a avaliação das actividades de investigação deve naturalmente envolver aspectos da ordem das atitudes, capacidades e conhecimentos. Os instrumentos de avaliação tradicionais, que verificam essencialmente a capacidade de memorização dos alunos (normalmente factos e conceitos isolados), não são adequados às aprendizagens que se pretende que estes atinjam quando realizam tarefas de investigação. Para Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999), "é sobretudo importante avaliar as atitudes dos alunos (persistência, auto-confiança...), e as suas capacidades (raciocínio, comunicação, espírito crítico, estabelecimento de conexões entre conceitos...)" (p. 103).

Na avaliação de tarefas de investigação é frequente recorrer-se a dois modos e instrumentos de avaliação: a observação directa dos alunos durante a realização da tarefa e o relatório escrito.

A observação dos alunos é uma prática de avaliação em que os professores depositam pouca confiança, sobretudo porque se faz, em geral, sem registos e de forma pouco sistemática devido às dificuldades inerentes a esta tarefa (Santos, 2005). No entanto, é reconhecida como uma forma privilegiada de recolher certo tipo de informação, sobretudo relativa às atitudes dos alunos e uma forma natural de avaliá-los durante a realização de tarefas de investigação e na fase de apresentação das suas conclusões à turma (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). As apresentações orais constituem uma situação de avaliação e aprendizagem cuja observação permite avaliar uma variedade de objectivos, incluindo as atitudes e valores, a compreensão do processo de investigação, a pertinência das estratégias, os processos de raciocínio, o uso de conceitos, as competências de cálculo e a capacidade de comunicação oral dos alunos. Varandas (2000) destaca uma outra função importante da observação, a de regular o próprio ensino. A observação pode levar os professores a questionarem e/ou a reformularem opções que inicialmente tinham tomado na sua planificação.

Nesta experiência de ensino, a observação é uma prática corrente ao longo de todo o processo de intervenção pedagógica, com foco na regulação do ensino e como meio de complementar a informação relativa aos alunos recolhida por outras vias. Também considero que o envolvimento dos alunos na exploração das tarefas de investigação e a participação nas discussões globais com o grupo-turma devem ser aspectos a avaliar, como sugere Menino (2004).

O recurso aos relatórios realizados pelos alunos, individualmente ou em grupo tem tido uma aceitação crescente por parte dos professores que procuram implementar um sistema de avaliação coerente com o trabalho realizado na aula. Os relatórios das tarefas de investigação são produções escritas pelos alunos com o objectivo de explicar as diferentes fases da investigação, os materiais utilizados, as estratégias de investigação utilizadas e a argumentar e comunicar as suas conclusões. Uma vez que a avaliação dos alunos na realização destas actividades requer uma ênfase particular no processo e não somente no produto final, estes relatórios devem indicar tanto os resultados obtidos como a forma como os alunos os alcançaram (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003).

Vários autores salientam a importância dos alunos experimentarem situações de aprendizagem em que tenham de apresentar raciocínios sobre a exploração de tarefas matemáticas, uma vez que a realização de relatórios de tarefas de investigação permite desenvolver o raciocínio, a argumentação, o gosto pela pesquisa, a persistência e a responsabilidade (Brocardo, 2001; Rocha, 2003; Segurado, 1997; Varandas, 2000). Pedir aos alunos que sintetizem o que aprendem como resultado do seu trabalho em torno das tarefas de investigação pode também ser um meio de os encorajar a dar sentido ao que é feito e permite à professora ter acesso às suas aprendizagens.

A interacção escrita, entre professor e aluno, é outra forma de levar à prática uma avaliação ao serviço da regulação (Santos, 2005). Para que uma interacção reguladora seja eficaz, deve identificar e interpretar os erros cometidos. De acordo com Santos (2002), o erro contém informação sobre o modo como o aluno tentou resolver a tarefa. Se este for apenas contabilizado, o aluno dificilmente compreende porque é que errou e o que é que tem de aprender para evitar repeti-lo. Assim, durante a experiência de ensino, todos os relatórios são devolvidos aos alunos com comentários detalhados tendo como referência os objectivos previamente definidos para cada tarefa e com sugestões para novas estratégias de abordagem, de forma a incrementar a sua qualidade e a permitir a evolução progressiva e contínua das aprendizagens dos alunos. Além disso, são classificados utilizando uma tabela de descritores (Anexo 8), conhecida pelos alunos, baseada nos parâmetros apresentados em Varandas (2003).

Se os alunos não estiverem habituados a realizar relatórios, é natural que se sintam confusos quando, pela primeira vez, lhes for feito esse pedido. Além disso, quando são dadas aos alunos indicações explícitas para incluirem nos relatórios alguns elementos sobre a forma como desenvolveram o trabalho, as aprendizagens conseguidas e as dificuldades sentidas, estes documentos facilitam o desenvolvimento de competências reflexivas e de auto-avaliação (Menino, 2004). Assim, e numa fase inicial, forneço aos alunos um conjunto de indicações precisas sobre o que espero que eles incluam nos relatórios de modo a apoiá-los na compreensão e concretização dessas indicações. Neste estudo, no início das aulas é fornecido aos alunos, por escrito, um guião com as indicações relativas ao formato e conteúdo dos relatórios (Anexo 7). Estas indicações são também discutidas na aula, de modo a clarificar o que se pretende, dando-lhes hipótese de colocarem as suas questões e se necessário, incorporar sugestões dadas pelos alunos tendo em vista clarificar certos aspectos do trabalho a realizar.

Os instrumentos acima descritos são os que usualmente merecem mais atenção na avaliação das tarefas de investigação pois têm um valor formativo acrescido ao permitir desenvolver a auto-avaliação e um ambiente de crítica construtiva entre os alunos e entre estes e o professor. No entanto, a experiência de ensino aqui apresentada contempla, além de tarefas de investigação, aulas de exposição de matéria e de resolução de problemas e exercícios que, como actividades de aprendizagem que são, também devem ser avaliadas. Há ainda a considerar o facto da escola recomendar e, frequentemente, os alunos também reclamarem, que o processo de avaliação seja individualizado para que cada aluno seja avaliado de acordo com as suas próprias metas.

Neste sentido, aplico dois testes escritos de avaliação no decorrer do semestre. O primeiro é realizado aproximadamente a meio da experiência de ensino, após a realização das duas primeiras tarefas e o segundo no final do semestre. O formato dos testes é consistente com as diferentes vertentes de trabalho desenvolvido na disciplina e a sua concretização tem como objectivos analisar o desempenho global de cada aluno em questões centradas nos conteúdos abordados ao longo do semestre e observar e recolher informação sobre a compreensão do processo de investigação e do modo como os alunos mobilizam os conhecimentos matemáticos.

Capítulo 5

O Desenvolvimento do Trabalho nas Turmas

O conhecimento do ambiente de aprendizagem vivido pelos alunos ao longo da experiência de ensino, em especial na exploração das tarefas de investigação, é importante para compreender a sua evolução relativamente à compreensão dos conceitos e procedimentos de Análise Numérica e à capacidade resolução de problemas. Além disso, permite contextualizar o percurso dos três alunos objecto de estudos de caso. Assim, neste capítulo, começo por fazer uma breve caracterização das turmas e uma descrição das actividades desenvolvidas na experiência de ensino. Depois, apresento uma descrição detalhada do trabalho desenvolvido pelos alunos nas tarefas de investigação propostas, procurando evidenciar a sua evolução ao longo do semestre. Apresento, ainda, as principais reacções dos alunos relativamente à utilização desta metodologia de ensino-aprendizagem e o balanço que fazem sobre a experiência de ensino. Finalmente, faço uma síntese desses resultados.

5.1. Apresentação das turmas

Os alunos abrangidos por esta experiência são do 2.º ano da Escola Naval e pertencem aos cinco mestrados integrados conferidos por esta instituição: Marinha, Administração Naval, Engenharia Naval – ramo de Mecânica, Engenharia Naval – ramo de Armas e Electrónica e Fuzileiros. Estes alunos frequentam a disciplina de Análise Numérica pela primeira vez (não há alunos repetentes) e estão divididos em duas turmas de 19 e 17 alunos, respectivamente, dos quais 35 são rapazes e 1 é rapariga, com idades entre os 18 e os 23 anos de idade. Como as duas turmas são idênticas em termos de comportamento e aproveitamento escolar, a análise realizada refere-se aos alunos em geral e não salienta a separação das turmas, a menos que algum facto o justifique.

De um modo geral, o ambiente de trabalho dentro e fora das aulas é tranquilo. Os alunos têm usualmente um bom relacionamento entre si e, quando confrontados com situações que envolvem desafio, mostram-se empenhados e trabalhadores. As turmas têm alguns bons alunos, a avaliar pelo seu desempenho escolar, e mesmo os que apresentam maiores dificuldades, preocupam-se em acompanhar o trabalho, não mostrando alheamento. Revelam, ainda, um espírito curioso e interessado por aquilo que se passa à sua volta, aderem com entusiasmo às actividades extra-curriculares organizadas na Escola Naval e são, por norma, participativos e cumpridores. Por isso, a reacção destes alunos a propostas de trabalho diferentes do habitual é, regra geral, muito boa, com uma grande participação no trabalho desenvolvido nas aulas. Em particular, não levantam qualquer objecção à realização da experiência de ensino nas aulas de Análise Numérica.

Embora os alunos não se mostrem especialmente entusiasmados com as disciplinas de Matemática, não revelam dificuldades de maior nesta disciplina ao longo do seu percurso escolar. Durante o 1.º ano do curso, estes alunos frequentam diversas disciplinas de Matemática – Análise Matemática I e II e Álgebra Linear – leccionadas segundo uma metodologia de ensino marcada pela sequência de aulas de exposição teórica de conteúdos, feita pelo professor, seguida de aulas de resolução individual de exercícios rotineiros (alguns, eventualmente, corrigidos no quadro). Nenhum dos alunos refere ter tido algum contacto anterior com a realização de trabalho investigativo nas aulas de Matemática.

5.2. A realização da experiência de ensino

A experiência de ensino, cujos pressupostos são descritos no capítulo anterior, é realizada durante o 1.º semestre de 2008/09. Dos 36 alunos que constituem inicialmente estas turmas, apenas 35 permanecem até ao final do semestre, tendo-se registado o abandono da Escola Naval por parte de um aluno. O meu conhecimento inicial dos alunos advém de algumas conversas informais com os professores das disciplinas no ano lectivo anterior. No entanto, o ambiente que se vive na aula, ao longo de todo o semestre, é bastante agradável pois os alunos procuram corresponder ao que proponho e desenvolvem comigo uma boa relação que facilita a intervenção experimental.

Esta experiência envolve uma combinação de aulas dedicadas à realização de tarefas de exploração/investigação, de aulas expositivas de apresentação e formalização de conceitos teóricos e outras aulas, ainda, de resolução de exercícios de consolidação de conhecimentos. O planeamento inicial destas actividades lectivas, que prevê 54 aulas de 50 minutos, sofre sucessivas adaptações e ajustamentos no decorrer da experiência, sobretudo ao nível da gestão dos tempos previstos para a realização das tarefas de investigação e a consequente necessidade de os interligar com os momentos de recolha de dados referentes à investigação em curso. No quadro do anexo 4 apresento a sequência de actividades realizadas na disciplina, ao longo do semestre e que relato, em seguida, de forma resumida.

A primeira aula

Considero importante que, no início desta experiência de ensino, os alunos tomem consciência de quais os objectivos, procedimentos e conteúdos formativos inerentes ao novo processo a desenvolver. Uma vez que estamos perante uma metodologia de ensino-aprendizagem diferente, é fundamental que os alunos iniciem a sua participação nesta experiência conscientes de todo o processo, evitando mal entendidos e outros factores susceptíveis de provocar ansiedade. Assim, na primeira aula explico aos alunos o que me proponho fazer, quais os objectivos e a metodologia de trabalho a utilizar, enfatizando o facto de isso só ser possível com a sua colaboração. Tento sensibilizar os alunos para a responsabilidade que têm neste processo, para as eventuais dificuldades que podem surgir e para os aspectos potencialmente positivos, nomeadamente, as capacidades a desenvolver.

Dou igualmente indicações relativamente à planificação, programa, bibliografia e avaliação da disciplina. Assim, apresento aos alunos o programa da disciplina, o planeamento das actividades lectivas e alguma bibliografia relevante relativa aos conteúdos a abordar, em particular o livro adoptado como manual (disponibilizado pela Escola Naval a todos os alunos, sem qualquer custo). Refiro também a disponibilização, na Intranet da Marinha (a que os alunos têm acesso), de um conjunto de problemas e exercícios que servem de base às aulas práticas de resolução de exercícios e outros documentos auxiliares do trabalho a desenvolver. Discuto, ainda, os instrumentos de avaliação a utilizar e os respectivos critérios de avaliação. Depois de esclarecidas as poucas dúvidas manifestadas pelos alunos em relação ao exposto, dou por terminada esta primeira parte da aula.

O tempo restante da aula é dedicado aos aspectos ligados mais directamente à investigação decorrente deste projecto. Começo por explicar aos alunos os objectivos da minha investigação, o seu percurso paralelo à experiência de ensino e o papel que eles desempenham como participantes. Solicito, também, autorização para utilizar as aulas para recolher a informação necessária à investigação, que é concedida por todos os 34 alunos presentes. Mais tarde, numa conversa informal, obtenho a autorização dos dois alunos em falta. Finalmente, faço a distribuição do questionário inicial (anexo 1) e todos os alunos presentes respondem.

As aulas com tarefas de investigação

Como já referido, a exploração de tarefas de investigação é uma característica fundamental desta experiência de ensino. Por isso, uma parte significativa do tempo das aulas (34% das 51 aulas dadas) é atribuída à sua realização. Isto requer uma modificação considerável na organização das aulas e no comportamento dos estudantes e da professora.

A realização de cada uma das tarefas propostas envolve quatro fases, três das quais em sala de aula: A introdução da tarefa, a sua exploração e a apresentação das conclusões dos alunos e sua discussão. A introdução das tarefas inicia-se sempre com a distribuição dos seus enunciados, por escrito, sendo esclarecidas eventuais dúvidas. Na primeira tarefa, acompanho esta distribuição com breves indicações respeitantes ao modo de organização do trabalho, chamando a atenção dos alunos para a necessidade de fazerem registos de todo o trabalho realizado de forma a facilitar a posterior escrita do relatório e a futura discussão. Também dou uma pequena explicação de qual o comportamento que os alunos devem ter ao trabalharem em grupo neste tipo de actividade. Tento deixar claro, igualmente, em que consiste a tarefa e o tipo de trabalho que se pretende desenvolver. Na introdução das restantes tarefas, opto por não realçar ou explicitar estas características particulares do tipo de trabalho proposto, uma vez que considero que a percepção destas características se desenvolve a partir de um trabalho continuado em torno das tarefas e da reflexão sobre a sua realização.

No que se refere à exploração das quatro tarefas propostas em cada uma das turmas, os alunos trabalham sempre a pares ou em pequenos grupo de três ou quatro elementos. Estes grupos são sempre constituídos no início de cada tarefa, por iniciativa dos alunos, com base nas suas afinidades. Apesar disso, os grupos que se formam são bastante heterogéneos, tanto a nível de aproveitamento escolar em Matemática como em relação às próprias personalidades e conseguem desenvolver um bom relacionamento entre si, dando igual oportunidade a todos os elementos do grupo para colocar as suas sugestões, apesar de nem sempre as discutirem nem as interrogarem antes de as aceitarem. É curioso verificar que são os próprios alunos que fazem questão de constituir e integrar grupos diferentes em cada tarefa, argumentando que o contacto com diversas formas de pensar e trabalhar é uma mais-valia para a sua aprendizagem. Os alunos seleccionados como casos também integram vários grupos durante a exploração das várias tarefas.

Durante esta fase de exploração das tarefas, circulo pela sala para observar o desenvolvimento e a forma de trabalho dos alunos, dialogando com eles e esclarecendo-os sobre algumas dúvidas geradas pelas tarefas. Nestas interacções procuro gerir o confronto de opiniões que se verifica entre os alunos e estimular a reflexão sobre o trabalho desenvolvido pelo grupo, incentivando-os a apresentar argumentos que justifiquem as principais opções seguidas. No entanto, a minha intervenção é no sentido de incentivar as discussões com comentários que não indiciam uma conclusão ou um 'modo de fazer', dando espaço aos alunos para prosseguirem os caminhos que entendem, mesmo que seja visível, à partida, que eles não vão ser bem sucedidos. Apesar de se notar, sobretudo nas primeiras tarefas, a falta de hábito dos alunos em realizar trabalho de natureza investigativa na sala de aula, eles funcionam sempre de forma bastante autónoma, sem necessidade de solicitar a professora com frequência. Algumas vezes procedo a explicações e esclarecimentos para toda a turma, através de questões e do pedido de explicações, sobretudo quando detecto dificuldades generalizadas. Pontualmente, considero necessário fornecer sugestões mais directas, para que o trabalho dos alunos possa avançar e não provocar desmotivação.

Na realização das tarefas, os alunos têm à sua disposição a máquina de calcular e são incentivados a utilizá-la como um auxiliar de trabalho. Este apoio é fundamental, não só na visualização de informação disponibilizada no enunciado da tarefa mas, sobretudo, quando os cálculos se tornam repetitivos e fastidiosos, podendo levar à desmotivação ou o abandono da tarefa.

No final da exploração de cada tarefa, os grupos elaboram um relatório final escrito onde apresentam as suas explorações e os seus resultados. À excepção do relatório da tarefa 3, que é elaborado na aula durante a exploração da tarefa, todos os outros são realizados em tempo extra-lectivo e entregues antes da aula em que se realiza a discussão da tarefa. Isto permite-me ter uma ideia global das explorações feitas pelos alunos e, com base nessa informação, planear o trabalho a desenvolver na aula seguinte, de discussão da tarefa. Simultaneamente, permite analisar os relatórios dos grupos que integram os alunos seleccionados como casos e preparar a base das entrevistas que realizo, também, antes da aula de discussão.

Para apoiar este trabalho de elaboração do relatório escrito, disponibilizo, no início do semestre lectivo, um guião (anexo 7) que descreve o que os alunos devem procurar fazer. Os relatórios produzidos são corrigidos por mim, através de comentários que incentivam os alunos a apresentarem a descrição das estratégias e procedimentos utilizados, as conjecturas formuladas, a sua verificação e as tentativas de justificação e, até mesmo, uma apreciação da tarefa. Quando adequado, utilizo os relatórios também para transmitir aos alunos reacções positivas em relação ao trabalho desenvolvido, como forma de motivação.

Terminada a fase de exploração de cada tarefa, os alunos apresentam oralmente, na aula, o trabalho desenvolvido. O objectivo destas discussões em grande grupo (turma) é promover a reflexão sobre o trabalho realizado, favorecendo a exteriorização das ideias dos alunos, a explicitação dos seus raciocínios e o confronto de diferentes estratégias e resultados. Estas discussões são ainda importantes para que os alunos aprendam a valorizar mais a apresentação da sua forma de pensar e não apenas os resultados obtidos. Deste modo, constituem momentos importantes de aprendizagem significativa.

Nas aulas de discussão das tarefas, desempenho o papel de orientadora e moderadora no confronto de ideias. Na apresentação das várias explorações, os alunos de cada grupo apresentam os seus resultados no quadro. Procuro que todos os grupos tenham a oportunidade de argumentar e explicar as suas estratégias e resoluções e permito que os restantes alunos interpelem os colegas. Aproveito os erros que vão surgindo para explorar conjecturas falsas e conceitos erróneos. Por vezes, a minha intervenção também é no sentido de levantar questões que podem ter importância significativa e que não são apresentadas por nenhum grupo. O trabalho com toda a turma é, assim, encarado como um complemento importante ao que os alunos exploram anteriormente pois pode levar a uma compreensão mais aprofundada do que fazem em grupo, a uma maior formalização dos raciocínios e a uma importante discussão sobre os aspectos que levantam mais dificuldades na exploração das tarefas de investigação. Nesta fase, todos os alunos intervêm bastante mas sempre de uma forma ordeira e respeitadora.

Algumas vezes, estas discussões permitem uma exploração de outros assuntos e suscitam a introdução de tópicos programáticos a desenvolver nas aulas de natureza mais expositiva. Deste modo, as tarefas propostas tornam-se também uma forma de suscitar a introdução e apresentação de novos conceitos, através de sínteses teóricas, feitas por mim (enquanto professora) depois de terminada a discussão da tarefa.

As aulas expositivas e de resolução de exercícios e problemas

Nas aulas expositivas, que ocupam apenas 16% do total dos tempos lectivos efectivamente utilizados faço a apresentação formal de conceitos e procedimentos matemáticos relativos aos tópicos programáticos da disciplina, alguns dos quais já abordados de forma intuitiva durante a exploração das tarefas de investigação. A exposição é feita oralmente e formalizada através da escrita, no quadro, dando ênfase às deduções e justificações por serem processos de raciocínio que pretendo que os alunos desenvolvam. Frequentemente sou interpelada pelos alunos no sentido de explicar 'melhor' o que está a ser exposto. De forma a tentar garantir o acompanhamento da aula por parte dos alunos, estes são também solicitados a participar na dedução e justificação dos métodos sempre que os conhecimentos já adquiridos o permitam. Assim, continuo a seguir uma forma de introduzir os tópicos a partir de questões que levanto e da exploração do diálogo com os alunos. Pretendo com estas aulas que os alunos adquiram os conhecimentos teóricos necessários à resolução de problemas reais contextualizados, aplicando-os de forma correcta.

Na minha experiência anterior, verifico que a exploração dos tópicos programáticos a partir das tarefas de investigação conduz a um maior dispêndio de tempo, devido tanto à sua natureza como à importância dada à actividade desenvolvida autonomamente pelos alunos. Assim, para ganhar algum tempo, decido que os tópicos da interpolação e das equações diferenciais não são explorados a partir de tarefas de investigação. No entanto, como já referido, nas aulas expositivas continuo a apostar numa metodologia centrada numa discussão com os alunos que lhes permita perceber os conceitos e procedimentos incluídos nestes tópicos. Assim, tento manter um ambiente de aprendizagem semelhante ao que se vive nas aulas dedicadas à exploração das tarefas de investigação, introduzindo os temas de forma problemática, procurando que os alunos sugiram ideias e as debatam entre si.

As aulas dedicadas à resolução de problemas e exercícios práticos servem para consolidar conhecimentos e, no caso dos problemas, desenvolver também algumas capacidades que vão para além da memorização de definições e procedimentos: comunicação, espírito crítico e modelação. Os exercícios e os problemas são resolvidos durante uma parte da aula, individualmente ou em interacção com o colega mais próximo e recorrendo ao uso da máquina de calcular. Ao circular pela sala, para observar o desenvolvimento do trabalho e esclarecer algumas dúvidas, posso verificar quando é que a maior parte dos alunos termina a resolução do conjunto de tarefas propostas no início da aula. Nesta fase, passo à apresentação e discussão dos resultados, no quadro, pelos alunos que se voluntariam. São ainda sugeridos outros problemas e exercícios do manual adoptado para serem resolvidos individualmente em tempo extra-lectivo, uma vez que o número de aulas disponibilizado para esta actividade (37% dos tempos lectivos do semestre), a meu ver (e dos alunos), é insuficiente para consolidar as matérias.

A última aula

Reservo a última aula para fazer, em conjunto com os alunos, o balanço do trabalho desenvolvido ao longo do semestre. Começo por salientar os aspectos que considero mais positivos no modo como decorreu a experiência de ensino, em particular o comportamento dos alunos e por lhes agradecer a colaboração na investigação em curso. Dou-lhes oportunidade de expressarem, também, as suas opiniões relativamente à experiência vivida e ao trabalho desenvolvido, quer por mim, quer por eles. Para que todos se possam sentir mais à vontade para se expressarem, sem receio de consequências, solicito o preenchimento, anónimo, do questionário final (anexo 2), cujos resultados apresento mais à frente.

5.3. O trabalho desenvolvido pelos alunos na realização das tarefas de investigação

Tarefa 1 – Intervalando

Apresentação da tarefa. A tarefa 1 realiza-se em ambas as turmas na segunda semana lectiva, após uma aula expositiva e outra de resolução de exercícios sobre a análise de erros, assunto transversal a todos os tópicos programáticos. Esta tarefa envolve os alunos em questões de natureza exploratória que servem de base à introdução de conceitos e de regras relativas à aritmética intervalar e tem como objectivos: (i) a integração dos alunos numa visão dinâmica de intervalo, cuja ideia é que no trabalho com valores aproximados, o intervalo [a, b] representa um número e (ii) a construção, pelos alunos, de significado para as operações aritméticas com intervalos.

Na sua estrutura distinguem-se três partes essenciais. A primeira questão pretende suscitar a discussão sobre as regras da aritmética intervalar e levar os alunos a deduzirem essas mesmas regras e a justificá-las. Torna-se necessário a formulação, teste, refinamento e justificação de conjecturas a partir da exploração de casos particulares de operações elementares conhecidas (adição, subtracção, multiplicação e divisão) utilizando intervalos de números reais. A segunda questão tem características semelhantes à anterior e pretende alargar o âmbito da aritmética intervalar às funções. A última questão desta tarefa propõe a resolução de um problema que tem como objectivo permitir que os alunos utilizem estratégias variadas enquanto percorrem as etapas que estão subjacentes à resolução de problemas em geral e analisar se são capazes de transferir o seu trabalho recente para uma situação matemática diferente das que são cobertas nas questões anteriores.

Exploração da tarefa. As duas aulas de 50 minutos, inicialmente previstas para a exploração da tarefa, não se mostram suficientes, talvez por ser a primeira vez que os alunos são chamados a este tipo de trabalho. No entanto, considero importante que todos os grupos terminem a exploração e, consequentemente, esta fase prolonga-se por mais uma aula de 50 minutos.

Após os alunos se terem organizado em pequenos grupos de 3 ou 4 elementos, procedo à distribuição do enunciado da tarefa e, uma vez que se trata do primeiro contacto que os alunos têm com este tipo de tarefa, explico o que se pretende e em que consiste a tarefa. Tento deixar claro o facto de nestas tarefas não haver resoluções certas ou erradas, mas que são os processos, as conjecturas formuladas e os argumentos produzidos para justificar o percurso feito e as conclusões obtidas que importa explorar e que constituem finalidades de aprendizagem. Relembro, também, qual o comportamento que os alunos devem adoptar ao trabalharem em grupo e chamo a atenção para a necessidade de fazerem registos de todo o trabalho realizado. Esta fase demora cerca de 10 a 15 minutos da aula, tempo após o qual os alunos iniciam a exploração da tarefa com grande entusiasmo.

Na primeira questão são fornecidos aos alunos alguns exemplos da utilização da regra da adição de intervalos de valores reais. Todos os grupos, através da observação desses exemplos, identificam o padrão que lhes está subjacente e formulam, correctamente, uma conjectura para a regra da adição, descrevendo o processo de construção do intervalo resultante através de linguagem natural. Quando solicitados a generalizar a regra identificada, os alunos utilizam a notação simbólica como complemento desta descrição informal. Nenhum dos grupos sente a necessidade de testar ou justificar a conjectura formulada. Assim, uma primeira conjectura baseada na observação de uns casos é rapidamente generalizada e assumida como conclusão sem que a sua validade seja questionada. Esta característica do trabalho dos alunos é bem representada no seguinte extracto de um relatório de um dos grupos de alunos:

> De acordo com a observação inicial, conclui-se de imediato que na adição de intervalos o mesmo resulta da soma do mínimo do primeiro com o mínimo do segundo e por sua vez, o máximo do primeiro intervalo com o máximo do segundo. De acordo com esta linha de raciocínio é possível estabelecer um padrão que serve de regra à soma de todos os intervalos de valores reais: [a, b] + [c, d] = [a + b, b + d]. (RT1)

A validade da regra só é analisada pelos alunos porque o enunciado da tarefa o pede explicitamente. Nesta altura, recorrem à experimentação de casos, geralmente muito reduzida e incompleta mas, nalguns grupos, com alguma sistematização. Os exemplos seguintes mostram os dois tipos de resposta a esta questão, observados no trabalho dos alunos. Alguns grupos apresentam a experimentação realizada, usando notação simbólica:

> A regra foi aplicada em diversos casos em que os sinais dos extremos dos intervalos eram distintos:
>
> $\overset{+\,+}{[2, 4]} + \overset{+\,+}{[3, 7]} = [5, 11]$ $\qquad$ $\overset{-\,+}{[-6, 9]} + \overset{-\,-}{[-10, -5]} = [-16, 4]$
>
> $\overset{+\,+}{[2, 5]} + \overset{-\,+}{[-3, 1]} = [-1, 6]$ (…).
>
> Como se constatou, a regra é válida para todos os valores reais. (RT1)

Outros grupos apenas a referem, usando linguagem natural: "Todos os intervalos de valores reais seguem esta regra, pois experimentámos para todas as combinações possíveis (intervalos positivos, intervalos negativos, intervalo negativo com intervalo positivo)" (RT1). A generalização a partir da observação de um número reduzido de exemplos parece ser encarada como natural e, nesta altura, a procura de justificações para validar as conjecturas que resistem a sucessivos testes não é uma preocupação dos alunos. Este aspecto é explorado, posteriormente, durante a discussão em grande grupo e, enquanto os alunos trabalham em grupo, questiono-os por várias vezes procurando que eles tentem justificar as afirmações que fazem.

A última alínea desta primeira questão desafia os alunos a utilizar a mesma estratégia – usando padrões e regras de generalização – para construir regras e significado para outras operações elementares: subtracção, multiplicação e divisão. Pretendo que os alunos compreendam o significado de intervalo e suas propriedades e que as regras podem não se manter quando são generalizadas. São esperadas algumas dificuldades uma vez que o conceito é novo e é necessário recorrer à exploração de casos particulares e à formulação e teste de conjecturas para procurar as generalizações solicitadas. Todos os grupos começam por formular uma conjectura para a regra da subtracção, por analogia com a regra da adição anteriormente deduzida. Uma vez que esta generalização não é válida para todos os valores, as conjecturas apresentam-se incorrectas e alguns grupos não identificam as incoerências nos resultados que apresentam. Isto deve-se, por um lado, à falta de compreensão do que significa um intervalo resultante de uma operação aritmética entre dois intervalos de valores reais e, por outro lado, ao facto de não testarem nem justificarem as conjecturas formuladas. No entanto, uma parte significativa dos grupos, que de forma autónoma as testam com base nalguns exemplos escolhidos de forma aleatória, identificam o erro e, nessa altura, utilizam o raciocínio dedutivo, com base nas propriedades dos números reais e suas operações e recorrendo à manipulação algébrica, para encontrarem uma regra correcta a partir da regra da adição já conhecida. O exemplo seguinte descreve bem o tipo de trabalho realizado por estes alunos nesta questão e de que modo a sua exploração conduz à compreensão do conceito de intervalo e à atribuição de significado às operações:

> Para a subtracção começamos por usar a regra da soma e, tomando como exemplo a seguinte subtracção [1, 2] - [5, 7] = [-4, -5], vimos que o intervalo resultante dava um valor incoerente [refere-se ao facto de -4 ser maior que -5]. Tivemos que compreender do que realmente se tratava somar dois intervalos. Sendo assim, com o auxílio de alguns exemplos é que nos apercebemos o que era realmente somar dois intervalos. Concluímos que, tendo dois intervalos diferentes, a sua soma não significava apenas juntar os mesmos mas que qualquer número que esteja no primeiro intervalo, subtraído por qualquer número do segundo intervalo, era um número que teria que pertencer ao intervalo resultante. Tentámos então transformar a subtracção numa soma, utilizando métodos algébricos: [a, b] - [c, d] = [a, b] + [-d, -c] = [a - d, b - c]. (RT1)

Nesta altura, perante a minha insistência na necessidade de justificarem as conjecturas formuladas, a maioria dos grupos argumenta, correctamente, da seguinte forma: “Chegámos a esta conclusão devido à influência que a Matemática provocou no nosso raciocínio, que fazermos uma subtracção é o mesmo que fazermos uma soma de um valor pelo simétrico do segundo” (RT1).

A dedução de regras para as restantes operações (multiplicação e divisão) segue um processo semelhante ao utilizado para a subtracção. A generalidade dos grupos formula uma primeira conjectura, por analogia com a regra da adição e, com base na exploração de alguns exemplos (sem sistematização aparente) realizam o teste de conjecturas e apercebem-se da sua falta de validade. Este processo permite refinar e/ou modificar as conjecturas iniciais e conduz, de forma geral, a formulações válidas que são apresentadas num misto de linguagem natural e simbólica. No entanto, os alunos continuam a assumir como conclusão uma conjectura formulada com base no estudo de alguns casos e a não sentir a necessidade de justificá-las.

Nas duas primeiras alíneas da questão 2, como esperado, todos os grupos consideram que as expressões algébricas das funções dadas representam a soma de dois intervalos de números reais e aplicam a regra da adição deduzida por eles, na questão anterior, para obter a resposta. Esta estratégia dos alunos, baseada na aplicação, sem compreensão, de métodos que eles conhecem de tarefas semelhantes, pode causar problemas quando as rotinas familiares não funcionam por diferentes razões. De facto, a última alínea é a que suscita maiores dificuldades porque, se as regras da questão anterior se estenderem e forem aplicadas, de forma rotineira, para calcular a imagem de um intervalo qualquer através da função $f(X) = X^2$, surge uma contradição: duas estratégias diferentes, que parecem ser possíveis e razoáveis, dão origem a valores diferentes para o resultado.

Nesta última alínea quase todos os grupos aplicam a regra da multiplicação de intervalos, deduzida por eles na tarefa anterior para calcular a imagem de um intervalo X, através da função $f(X) = X^2$. Com base nessa regra (que em alguns grupos não é a correcta) formulam uma conjectura, generalizando a partir de apenas um caso (o intervalo [2, 7], fornecido nas alíneas anteriores do enunciado). Um grupo dá por terminada a questão, sem testar ou justificar a conjectura. Os restantes grupos, que utilizam esta estratégia, recorrem à experimentação de casos, embora de forma pouco sistemática, para a testar e identificam alguns conflitos (por exemplo, quando experimentam intervalos de valores negativos a ordem dos limites do intervalo aparece trocada). No entanto, como não procuram outro tipo de raciocínio para os auxiliar a ultrapassar as dificuldades encontradas, desistem, deixando as conjecturas iniciais erradas. O exemplo seguinte revela a atitude descrita, tomada por diversos grupos:

> Inicialmente, o grupo começou por responder a esta questão (…) através da regra que deduzimos na questão 1. Este resultado está certo, embora a resolução não seja a correcta, uma vez que não funciona para intervalos com valores negativos. Após reflexão e discussão acerca de diferentes formas para ultrapassar este problema, o grupo não chegou a nenhuma conclusão satisfatória, não conseguindo assim concluir esta tarefa com êxito. (RT1)

Este aspecto é abordado depois na aula de discussão, de forma a levar os alunos a compreenderem a necessidade de procurarem diferentes tipos de raciocínio quando identificam inconsistências e a arranjar mecanismos para os identificar, talvez através do teste das suas conjecturas.

Há, no entanto, três grupos que centram a sua exploração na representação gráfica da função e, recorrendo à experimentação (sistematizada) de vários intervalos, são capazes de relacionar intuitivamente a monotonia da função com as propriedades dos números e reconhecer que a determinação das imagens de funções intervalares se resume à determinação dos extremos absolutos de uma função num intervalo fechado. A opção por este tipo de representação parece facilitar a identificação correcta de todos os casos possíveis e a obtenção eficiente das suas imagens, as quais conduzem à formulação das conjecturas. A representação gráfica serve também como base para a justificação destas conjecturas, apesar dos alunos não explicitarem preocupação com este processo. Estes alunos mostram, igualmente, facilidade em relacionar a representação algébrica da função com a sua representação gráfica e em interpretá-la, uma vez que as conjecturas apresentadas, em notação simbólica, estão maioritariamente correctas, como mostra o exemplo seguinte:

> Para concluir a imagem de um intervalo real da função f definida por X^2, é importante perceber como é que se comporta o [seu] gráfico. Após um período de experimentação com intervalos específicos verificámos [no gráfico] duas situações distintas. Para casos em que os extremos sejam de sinal igual, a imagem da função é calculada da seguinte forma:

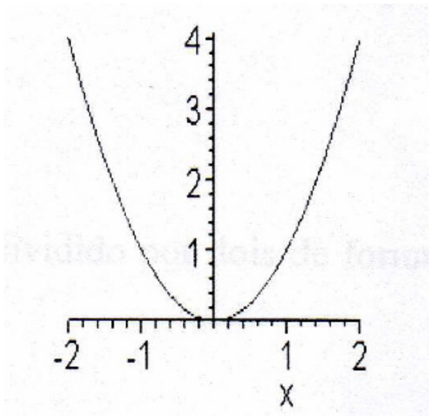
$f(X) = [a^2, b^2]$ se $a, b > 0$ pois $|a| < |b|$

$f(X) = [b^2, a^2]$ se $a, b < 0$ pois $|b| < |a|$

Para os casos em que os extremos tenham sinal contrário, observámos que, ao calcular a imagem da função (…) tem-se que, para $X = [a, b]$ com $a < 0$:

$f(X) = [0, a^2]$ se $|a| > |b|$

$f(X) = [0, b^2]$ se $|b| > |a|$ (RT1)



Para formularem uma conjectura relativamente às imagens dos intervalos através da função $f(X) = e^X$, os alunos já recorrem, maioritariamente, à representação gráfica. Como não têm uma regra imediata para aplicar, como no caso da função anterior, ao procurarem uma estratégia, entre os seus recursos, esta é, provavelmente, a única disponível: "Optámos por desenhar o gráfico da função (…). Foi necessário desenvolver uma solução que se adaptasse [a esta função] pois o método usando anteriormente não era possível aplicar numa exponencial" (RT1). Apesar disso, há alguns grupos que conjecturam uma regra, de forma imediata e sem fundamentação, que consiste em aplicar a função exponencial directamente aos extremos do intervalo. Neste caso, como a função é monótona, a regra deduzida é correcta. Nestes grupos continua a não haver evidências de qualquer tentativa de teste ou justificação destas conjecturas.

De um modo geral, os grupos não revelam dificuldades na interpretação do enunciado e na identificação dos dados do problema proposto na última questão desta tarefa (as que surgem são ultrapassadas em discussão com os colegas dentro do próprio grupo). A maioria dos grupos começa por organizar os dados, escrevendo-os em forma de intervalo, uma vez que identificam o problema como sendo de aritmética intervalar. Esta categorização do problema é fundamental pois determina o seu planeamento e a própria execução do plano.

Como esperado, a estratégia dominante e a que se revela mais eficiente é decomposição do problema de forma hierárquica. Para isso, os alunos efectuam a divisão dos intervalos iniciais através da aplicação das regras deduzidas na primeira questão da tarefa e depois calculam o erro a partir do intervalo resultante, recorrendo à definição. Os alunos, de forma geral, respondem correctamente ao problema e apresentam os cálculos realizados acompanhados de uma descrição dos processos em linguagem natural. O exemplo seguinte é típico desta estratégia:

> Se temos um comprimento de valor 2 com um erro de ±0,1 então podemos dizer que está no seguinte intervalo: [1,9; 2,1] (…).
>
> Depois efectuamos a regra da divisão de intervalos para obtermos o resultado final: [1,9; 2,1] / [1,18; 1,22] = [1,56; 1,78].
>
> Para calcular o erro é necessário calcular a diferença do limite superior com o limite inferior que é ±0,22. O erro é metade deste valor, ou seja, ±0,11. (RT1)

Porém, alguns grupos, não recorrem aos recentes conhecimentos das regras de aritmética intervalar mas optam por uma estratégia que consiste na análise exaustiva dos resultados possíveis para a divisão dos dados fornecidos (com os respectivos erros) e no cálculo do erro associado a cada uma desses resultados através da sua comparação com um valor, a que chamam de referência ou padrão, obtido a partir da divisão dos valores aproximados dos dados do problema. Depois dos cálculos efectuados, os alunos seleccionam o erro com maior valor absoluto para solução do problema, utilizando correctamente a definição de majorante de erro. Um destes grupos, recorre à construção de uma tabela como modo de organizar e apresentar a informação e para facilitar a realização dos cálculos, enquanto os outros apresentam os cálculos acompanhados de uma descrição deste processo em linguagem natural, como mostra o exemplo seguinte:

> Primeiro vamos apenas dividir o resultado sem o erro para obter um valor padrão: 2/1,2 = 1, 6(6) → resultado final sem erro
>
> Agora vamos aplicar os erros, por isso vamos obter quatro valores diferentes para o resultado final. Depois para obter o erro é necessário calcular: erro = valor original – valor padrão.
>
> Para os dois valores do erro positivo vamos obter:
>
> $(2 + 0,1)/(1,2 + 0,02) = 1,7213115$ e o Erro = $1,7213115–1,6(6) \approx 0,055$
>
> (…). Para calcular o erro final, vamos procurar dentro destes casos possíveis o maior. (RT1)

Outra estratégia, escolhida apenas por um grupo, consiste na análise e na escolha criteriosa dos valores dos dados que dão origem ao menor e ao maior quociente entre eles. Com estes valores, os alunos constroem um único intervalo, a partir do qual podem calcular um majorante para o erro, poupando bastante tempo e economizando passos. Embora a estratégia seja adequada e o intervalo obtido esteja correcto, os alunos confundem-no com um intervalo para os erros e terminam a resolução sem uma resposta correcta para o problema, como mostra o excerto seguinte do seu trabalho:

> Para encontrar o valor mínimo da divisão minimizámos a divisão, ou seja, dividimos o menor valor do numerador pelo maior valor do denominador. Depois fomos maximizar a divisão, isto é, dividimos o maior valor do numerador pelo menor valor do denominador. Assim, o erro é E = [1,58; 1,78]. (RT1)

Os alunos mostram, assim, ter conhecimentos suficientes e algum potencial heurístico para seleccionar uma estratégia adequada ao problema e que conduz à solução pretendida. No entanto, começam por seleccionar uma única estratégia e não avaliam a sua viabilidade ou eficiência antes de a executar, imaginando o desenvolvimento do processo de resolução. Na fase de execução do plano os alunos empenham-se, sobretudo, na realização de cálculos que registam com algum detalhe. Revelam ainda ter os conhecimentos necessários para resolver o problema, de forma correcta, com as estratégias planeadas, embora nem sempre recorram aos mais recentes.

Depois de obtida uma solução, nenhum grupo mostra preocupação em verificar os cálculos efectuados ou os resultados obtidos. Também nenhum grupo tenta interpretar os resultados no contexto do problema (por exemplo, comparando-os com os erros dos dados iniciais) nem propõem planos de resolução alternativos, talvez porque não reflectem sobre a eficiência do processo de resolução. Este aspecto é alvo dos meus comentários aos relatórios escritos e é posteriormente explorado durante a discussão.

Relatório final da tarefa. No final da fase de exploração da tarefa os alunos elaboram, também em grupo mas em período extra-lectivo, o respectivo relatório escrito. Os relatórios produzidos pelos alunos nesta primeira tarefa traduzem, de forma muito simplificada, as explorações realizadas, embora uns se apresentem mais completos do que outros. A maioria dos grupos limita-se a enunciar apenas as conjecturas finais, isto é, aquelas que são aceites de forma imediata ou que resistem aos testes realizados, mesmo que tenham formulado e rejeitado outras. Apenas dois grupos apresentam as conjecturas que inicialmente formulam e que depois rejeitam, explicando as razões de tal decisão. A justificação de conjecturas também tem uma presença muito fraca nos relatórios. Em alguns, não houve qualquer tentativa para o fazer. Noutros, os alunos tentam apresentar uma justificação mas baseada em apenas alguns exemplos sem sistematização. Apenas dois relatórios apresentam algumas justificações válidas para as conjecturas formuladas. As respostas relativas à resolução do problema são igualmente breves e limitam-se a apresentar e descrever os cálculos realizados.

A análise dos relatórios desta primeira tarefa mostra, assim, uma valorização dos produtos em relação aos processos, dada a grande preocupação em registar os resultados e não em explicar o modo de os obter nem em justificar porque é que se obtêm. Este facto revela a falta de hábito dos alunos em realizar este tipo de tarefas e em fazer relatórios. Por isso, os meus comentários escritos, nestes relatórios, são no sentido de salientar a necessidade de indicar não só as conclusões mas também as estratégias utilizadas.

No final, alguns grupos escrevem a sua apreciação da tarefa proposta, como sugerido no guião fornecido por mim para auxiliar a realização dos relatórios, tendo todos feito um balanço positivo. As opiniões expressas revelam que, apesar das dificuldades em explicitar no papel os seus raciocínios, os alunos compreendem o tipo de trabalho que se pretende desenvolver e a sua importância para a aprendizagem. A apreciação seguinte resume bem a generalidade das opiniões:

> Estes trabalhos de investigação são bastante vantajosos para os alunos envolvidos por vários motivos. Os mais evidentes são, o facto de promover a discussão entre os elementos do grupo a fim de aprendermos uns com os outros outras maneiras diferentes de resolver os mesmos exercícios e porque ao termos que investigar como se chega às fórmulas, às regras, etc., vamos ficar com esse processo mais apreendido para o futuro. Logo, quando um dia for necessário recorrer a estas fórmulas, mesmo que não as saibamos de cor, podemos chegar a elas pelos mesmos caminhos em que estivemos a trabalhar. (RT1)

Discussão da tarefa. Os alunos mostram-se muito empenhados em participar e intervir nesta fase do trabalho, pelo que o tempo de 50 minutos previsto para a discussão desta tarefa não é suficiente e estende-se por mais uma aula de 50 minutos. Opto por iniciar a discussão com a apresentação do trabalho realizado pelo grupo cuja exploração está mais incompleta ou que apresenta erros. O representante do grupo seleccionado apresenta, perante a turma e utilizando o quadro da sala, os seus resultados finais relativos à primeira questão, sem explicar os seus raciocínios, como se de exercícios se tratasse. Depois é a vez de outros grupos intervirem, de forma ordeira através dos representantes dos respectivos grupos, questionando sobre as estratégias apresentadas e contra argumentando as conjecturas formuladas pelos colegas. De facto, os alunos vêm-se confrontados com várias conjecturas a que eles próprios também chegam, com conjecturas formuladas por colegas e, ainda, com novas questões colocadas por mim (quando elas não surgem da parte dos outros grupos) no sentido de os incentivar a procurar algumas justificações para as conjecturas que vão surgindo.

A primeira questão a ser discutida centra-se na compreensão do conceito de operação com intervalos e no significado do seu resultado, pois parece-me ser o foco das dificuldades apresentadas por alguns grupos durante a exploração da tarefa. Neste sentido, e após a apresentação no quadro de algumas conjecturas erradas por parte de diferentes grupos, questiono a turma sobre este novo conceito: "Quando operam dois intervalos o que é que estão à espera de obter como resultado? E o que representa esse resultado?". Apesar das respostas dos alunos não satisfazerem os requisitos de uma definição 'rigorosa', parece-me que durante a discussão da tarefa todos os grupos são capazes de atribuir significado ao intervalo resultante de uma operação elementar com intervalos pois passam a considerar o conceito na formulação de novas conjecturas ou para refinar as iniciais.

Na questão seguinte, os alunos cometem muitos erros pois o seu trabalho está focado apenas na aplicação directa das regras da questão anterior e ao generalizarem os resultados para a função $f(X) = X^2$, a partir de um exemplo único, não verificam a sua validade através de algum tipo de raciocínio que possa detectar esses erros. Aqui, a aula de discussão tem um papel importante pois, através de contra-exemplos que os colegas apresentam, os alunos percebem o papel do teste e da justificação de conjecturas neste processo de exploração. Gera-se, assim, uma discussão muito rica que permite abordar uma variedade de estratégias que surgem durante a exploração da tarefa e discuti-las relativamente à sua eficiência, às dificuldades que delas emergem e ao modo como podem ajudar a identificar e ultrapassar os erros na formulação de conjecturas. Aproveito para realçar, também, a variedade de representações matemáticas que os alunos podem utilizar nas suas explorações e a importância de seleccionarem a mais adequada a cada situação. Em particular, discuto a vantagem da utilização da representação gráfica nesta tarefa para identificar inconsistências e auxiliar no trabalho de generalização de resultados. Este confronto de ideias ajuda os alunos a reconhecer a necessidade de procurarem diferentes tipos de raciocínio que facilite o processo de formulação das suas conjecturas. Uma vez que a descoberta de argumentos que justificam as conjecturas formuladas está ao alcance dos alunos, incentivo-os a pensar sobre este aspecto. Perante a minha insistência, alguns alunos vão dando sugestões pouco válidas mas, dialogando entre si e comigo, acabam por justificar as conjecturas com base na monotonia da função $f(X) = X^2$. No entanto, há ainda bastantes alunos que nunca intervêm directamente neste tipo de discussão.

Esta questão suscita, ainda, a introdução de outro tópico programático – a propagação dos erros – que está relacionado com a utilização de funções associadas a valores aproximados representados por intervalos e que é depois desenvolvido nas aulas de teor mais expositivo.

Por fim, e dada a falta de tempo, a discussão em torno da resolução do problema desta tarefa foca-se apenas nos aspectos relativos às dificuldades que identifico através dos relatórios, nomeadamente a importância da utilização de estratégias de verificação de resultados e a sua interpretação. A partir dos resultados de um grupo, expressos perante a turma, os alunos veem surgir, fruto da contribuição de outros grupos, diferentes estratégias e processos igualmente possíveis de serem utilizados. As estratégias discutidas limitam-se às que são apresentadas nos relatórios mas, pela falta de tempo já referida, não é possível aprofundar ou alargar a discussão em torno delas. Apesar disso, esta discussão permite salientar o facto de não haver uma resolução única neste tipo de tarefa e a importância da procura de estratégias alternativas de resolução de um problema para ultrapassar as dificuldades de um plano inicial ou para encontrar um processo mais eficiente. Nesta altura, esta característica ainda não é vista pelos alunos como inerente ao processo de resolução de problemas.

Tarefa 2 – Equacionando

Apresentação da tarefa. Esta tarefa realiza-se, em ambas as turmas, duas semanas depois da tarefa anterior e envolve os alunos em questões de natureza exploratória que servem de base para abordar os métodos de resolução de equações não lineares. À semelhança da tarefa anterior, está estruturada em três partes que têm objectivos distintos. Na primeira questão é proposta a resolução de uma equação não linear (sem resolução analítica) para a qual os alunos ainda não têm procedimentos disponíveis e pretende analisar que estratégias utilizam e/ou constroem e a que conhecimentos anteriores de Matemática recorrem. Esta questão constitui um exemplo de possibilidade de utilização da calculadora como meio auxiliar não só de cálculo, mas também de visualização da informação disponibilizada.

O trabalho na segunda questão constitui o ponto de partida para o desenvolvimento e formalização dos métodos numéricos para resolução de equações não lineares. Em particular, pretendo iniciar a discussão sobre o método da bissecção, levando os alunos a deduzi-lo e a compreender a fundamentação desse procedimento. Também quero salientar a importância dos métodos numéricos, especialmente os iterativos. Esta questão, de natureza mais aberta, desafia os alunos a criar procedimentos (algoritmos) de resolução de equações não lineares com base na identificação de padrões que permitam realizar generalizações.

Na última questão da tarefa os alunos deparam-se com uma situação problemática cujo objectivo é a análise das estratégias usadas na sua resolução e dos conhecimentos que mobilizam.

Exploração da tarefa. A exploração desta tarefa inicia-se com a distribuição do enunciado escrito, que é lido individualmente pelos alunos antes do começo do trabalho a pares. Oralmente e para toda a turma, reforço a necessidade dos alunos fazerem registos de todo o trabalho realizado, embora eles próprios mostrem cuidado em fazê-lo, a pensar na escrita do relatório. Os alunos iniciam o trabalho mostrando bastante entusiasmo, discutindo com o colega e tentando encontrar estratégias para responder às questões colocadas.

De um modo geral, a turma revela algumas dificuldades ao iniciar a exploração da primeira questão. Todos os grupos privilegiam a manipulação algébrica para encontrar a solução da equação apresentada no enunciado. No entanto, a equação é não linear e, neste caso, não tem resolução analítica, pelo que os alunos não são bem sucedidos nas suas tentativas de resolução. Esta opção parece estar relacionada com as suas experiências escolares em que a manipulação algébrica é a estratégia habitualmente utilizada para resolver equações.

Alguns pares de alunos, após a tentativa de resolução analítica optam pela representação gráfica e, através da máquina de calcular, encontram uma solução aproximada para a equação. No entanto, após decorrido algum tempo, verifico que uma grande parte dos alunos sente-se desmotivado e não procuram estratégias alternativas para resolver a equação. Esta atitude revela que os alunos ainda têm uma noção pouco clara do que se pretende na exploração de uma tarefa de investigação. Torna-se, assim, necessária a minha intervenção no sentido de os auxiliar a continuar o trabalho, relembrando em que consiste o trabalho de exploração e a importância da utilização de diversas estratégias para continuar ou enriquecer esse trabalho. Mas é com a seguinte intervenção de um aluno que me apercebo que as suas dificuldades também estão relacionadas com as suas crenças relativas à Matemática: "Mas professora, eu também posso resolver pela máquina [calculadora gráfica] mas assim [a resposta] não é válida". Aproveito então para fazer algumas considerações sobre a necessidade de procurar argumentos para justificar estratégias e conjecturas que conduzem às conclusões. Após este curto período de interacção, os alunos direccionam a sua atenção na procura de estratégias de resolução e, como esperado, optam maioritariamente pela utilização da máquina de calcular para, com base na representação gráfica, encontrarem uma solução. Embora todos os grupos tenham e possam usar máquina de calcular gráfica, é nítida a falta de experiência de alguns no seu manuseamento, que é superada com a ajuda entre os elementos dos vários pares.

Na utilização da representação gráfica e das potencialidades da máquina de calcular, os alunos seleccionam, fundamentalmente, duas estratégias de resolução, representadas pelos exemplos seguintes:

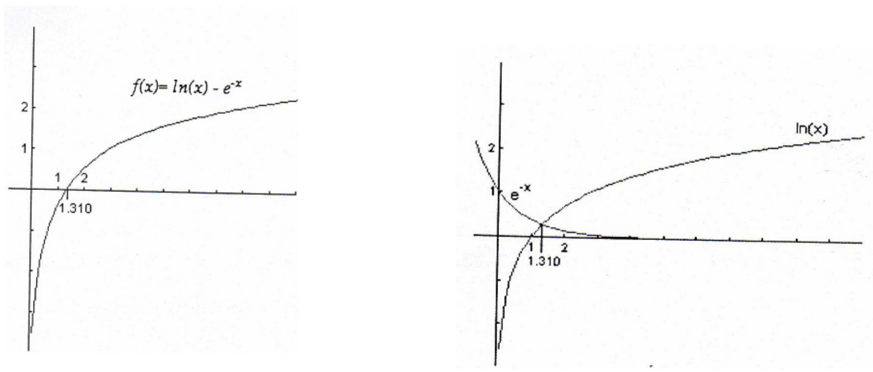


Figura 5.1 – Estratégias de resolução de uma equação não linear utilizadas pelos alunos (RT2)

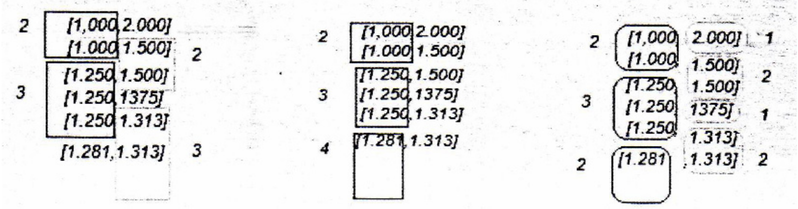
A primeira, mais imediata, em que os alunos inserem na máquina de calcular a expressão do membro não nulo da equação e procuram o ponto de intersecção do seu gráfico com o eixo dos *xx*. A outra estratégia compreende uma fase inicial de manipulação algébrica, em que os alunos transformam a equação inicial numa igualdade entre duas funções, cujas expressões inserem na máquina de calcular, para depois procurarem o ponto de intersecção dos seus gráficos. Há uma parte significativa dos grupos que apresenta, no seu trabalho, estas duas estratégias, notando-se já uma certa preocupação em procurar estratégias diversificadas para resolução de problemas. Este mesmo facto é visível no trabalho de dois pares que, além da estratégia gráfica, utilizam também uma estratégia de tentativa e erro, atribuindo valores à incógnita e, com base no corolário do teorema de Bolzano, encontram uma solução em forma de intervalo. Num destes pares este intervalo é, inclusivamente, refinado até uma amplitude que consideram adequada, como se pode observar no seguinte excerto do seu trabalho:

> Optámos por atribuir valores a x na tentativa de obter uma aproximação ao valor que é solução de f(x) = 0. Recorrendo à calculadora apenas para fins de cálculos, tentámos compreender entre que valores inteiros estaria compreendida a raiz de f.
>
> | Valores atribuídos | Observações na calculadora |
> |---|---|
> | $x = 1$ | ln(1) – e^(-1) = -0.3678794412 |
> | $x = 2$ | ln(2) – e^(-2) = 0.5578118973 |
>
> A partir dos resultados obtidos (f(1)<0 e f(2)>0) deduzimos que a raiz de f estaria compreendida no intervalo]1,2[. Depois de encontrado um intervalo mais amplo, interessa agora reduzir a sua amplitude:
>
> | Valores atribuídos | Observações na calculadora |
> |---|---|
> | $x = 1,1$ | $\ln(1,1) - e^{(-1,1)} = -0.2375609039$ |
> | $x = 1,2$ | (…) |
> | $x = 1,4$ | $\ln(1,4) - e^{(-1,4)} = .0898752727$ |
>
> A raiz de f estaria compreendida no intervalo]1,3, 1,4[
>
> | Valores atribuídos | Observações na calculadora |
> |---|---|
> | $x = 1,30$ | $\ln(1,30) - e^{(-1,30)} = -0.010167528$ |
> | $x = 1,31$ | (…) (RT2) |

O objectivo da utilização de estratégias diferentes parece ser, nestes casos, o confronto dos resultados para confirmação dos mesmos. Deste modo, os alunos estabelecem, com sucesso, uma relação entre a representação numérica e a representação gráfica. De facto, ao utilizarem a representação gráfica de funções para resolverem a equação, os alunos também são capazes de estabelecer uma relação entre este tipo de representação e a respectiva representação algébrica. Como não é visível, no trabalho dos alunos, qualquer tentativa de reflexão ou análise sobre a eficiência das diferentes estratégias, este aspecto é abordado durante a aula de discussão da tarefa. A validação e justificação de estratégias são também foco de aprofundamento nessa altura, dada a ausência destes processos na exploração desta questão.

A exploração da questão seguinte envolve uma sequência de intervalos que é apresentada aos alunos e que tem uma lei de formação implícita mas que é inequívoca pelas condições dadas. O trabalho com sequências conduz naturalmente ao estudo de padrões e regularidades e, em particular, permite aos alunos desenvolver a capacidade de estabelecer generalizações. Nesta questão, os alunos são solicitados a descrever o próximo intervalo da sequência e a estabelecer uma generalização para o processo de formação dessa sequência.

Com base na observação dos elementos da sequência, todos os alunos procuram regularidades que lhes permita compreender o seu modo de formação e identificam, correctamente e com facilidade, um padrão para a redução da amplitude entre os intervalos da sequência. Assim, conjecturam que na sequência apresentada, de um intervalo para o outro de ordem seguinte, a amplitude diminui para metade. Esta conjectura é formulada em linguagem natural e assumida como conclusão sem mostrarem preocupação em justificá-la, uma vez que a verificam para os elementos da sequência que estão disponíveis. Nesta fase, e embora esteja ao alcance dos alunos, nenhum grupo relaciona a ordem do elemento da sequência com a amplitude do respectivo intervalo. Os alunos, no seu trabalho a pares, também identificam a existência de alterações ao nível dos limites (superiores e inferiores) dos intervalos e procuram regularidades recorrendo a diversas estratégias, essencialmente baseadas em observações, contagens e esquemas numéricos. Os exemplos seguintes ilustram as estratégias que alguns pares, com base numa análise intuitiva, utilizam para encontrar o intervalo seguinte da sequência:



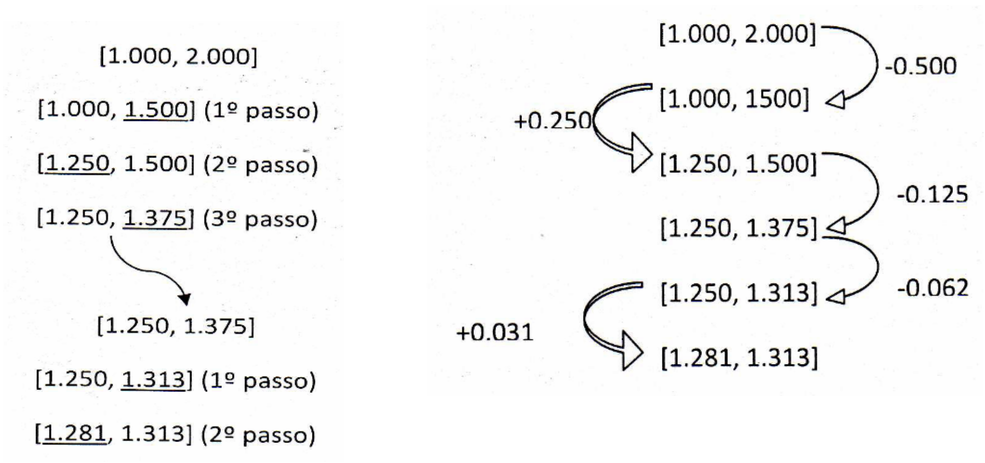


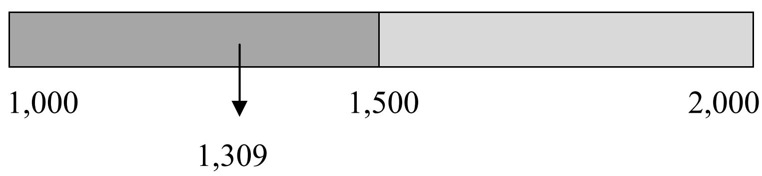
Figura 5.2 – Estratégias utilizadas pelos alunos para procurar regularidades (RT2)

No entanto, estas estratégias não são suficientes para identificar um critério de decisão sobre o extremo do intervalo a reduzir, uma vez que não têm em consideração toda a informação disponível e necessária para este processo. Deste modo, as conjecturas formuladas pelos pares apresentam muitas incorrecções. Após decorrido algum tempo e tendo verificado que os alunos não as identificam, considero necessário chamar a atenção da turma para a necessidade de uma leitura atenta do enunciado, referindo que este constitui um elemento central na exploração do padrão. Esta indicação é fundamental para levar os alunos a testarem as suas conjecturas com base nas novas condições (a raiz da equação pertencer sempre ao intervalo) e a identificarem os erros cometidos na sua formulação.

Os alunos enfrentam bastantes dificuldades na reformulação das suas conjecturas relativas à formação dos extremos dos intervalos da sequência dada. Esta situação deixa-os um pouco angustiados e tenho que incentivar alguns pares, que querem desistir, a procurar estratégias diferentes para identificar regularidades e continuar a exploração. Só passado bastante tempo é que todos os alunos conseguem encontrar um critério para determinar qual a forma de alteração dos extremos dos intervalos e continuar o padrão para o termo seguinte da sequência. Todos os pares optam por uma estratégia de comparação com o valor da raiz para definir o intervalo seguinte, como expresso pelo comentário seguinte de um aluno, quando me aproximo para observar o estado de desenvolvimento do trabalho do respectivo par: “Observamos que quando o valor médio [do intervalo] é inferior à raiz (que tomámos como número de referência), então no limite inferior do intervalo a seguir colocamos este valor médio, mantendo-se o limite superior anterior”.

Esta estratégia, apesar de válida, está necessariamente ligada a um caso particular (a equação fornecida no enunciado) e baseia-se no conhecimento de um valor que é, geralmente, desconhecido – a raiz da equação. Os alunos têm dificuldade em abstrair-se de um exemplo concreto e, como também não compreendem (e não tentam aprofundar e justificar) as razões que estão por trás desta estratégia, a generalização do método fica limitada e reflecte apenas o seu trabalho de exploração, identificando o que se mantém constante e o que varia. A generalização que é efectuada assume, assim, um carácter informal, pois a lei de formação da sequência que apresentam é descrita, maioritariamente, em linguagem natural, acompanhada de tabelas ou esquemas visuais para exemplificar os raciocínios descritos e parte de situações concretas. O excerto seguinte caracteriza bem este processo de generalização recursivo e as dificuldades sentidas pelos alunos:

> A tentativa de obter uma forma de determinar os extremos de cada elemento da sequência revelou-se uma tarefa penosa, visto que não conseguimos encontrar uma regra matemática que demonstre a técnica utilizada pelo grupo. Todavia, tentámos um método que consiste em, dado um intervalo, acharmos o seu ponto médio, o que resulta em dois intervalos. Destes dois vamos aproveitar o intervalo que contém a raiz. Numa representação ilustrativa temos:



> Ou seja, optamos por escolher o intervalo da esquerda porque é nele que se encontra o valor da raiz. (RT2)

Dois pares de alunos utilizam, igualmente, um misto de linguagem natural e simbólica e generalizam o processo de construção dos intervalos através de um algoritmo, onde os elementos da sequência surgem também por recorrência.

> Seja o intervalo [A, B]. Como a amplitude de um intervalo é sempre metade da amplitude do intervalo anterior, então C = (A + B) /2 (valor médio) será um dos extremos do intervalo seguinte. Cada intervalo da sequência irá conter sempre a raiz de f(x). Como tal, e sabendo que f(x) é monótona crescente em IR, deduzimos as seguintes condições:

- Se C < f(x) = 0 então C é limite inferior e o limite superior mantém-se B.
- Se C > f(x) = 0 então C é limite superior e o limite inferior mantém-se A. (RT2)

A avaliar pelos comentários feitos por alguns pares nos seus relatórios escritos, de que é exemplo o seguinte, alguns alunos ainda reconhecem que a estratégia que usam para encontrar um elemento (intervalo) da sequência é desadequada, uma vez que depende do intervalo inicial e que a recursividade do processo dificulta o trabalho subsequente para encontrar intervalos de uma ordem elevada:

> Este método não responde na totalidade ao objectivo da pergunta pois a questão pede a regra geral para qualquer elemento da sequência. Segundo a regra que obtivemos só podemos obter um intervalo se já conhecermos o intervalo anterior àquele que pretendemos obter. (RT2)

No entanto não são capazes de ultrapassar as dificuldades encontradas. Ainda nesta questão, os alunos são confrontados com a necessidade de encontrar uma ordem correspondente a um determinado elemento da sequência de intervalos apresentada. Apenas três pares de alunos detectam uma relação funcional entre a ordem do intervalo e a sua amplitude e reconhecem a necessidade de a expressar algebricamente. A partir da expressão correctamente obtida, concretizam a amplitude pretendida e obtêm a resposta, como mostra o exemplo seguinte:

> Observando atentamente a sequência de elementos dada no enunciado, reparámos que a amplitude de cada elemento corresponde a metade da amplitude do elemento anterior. Neste caso, sendo o primeiro elemento [1.000, 2.000], então a amplitude de cada intervalo será dada pela expressão: $A_n = 1/2^{n-1}$.
>
> Como se pretende calcular o número de elementos para obter um intervalo com amplitude igual a $0,5 \times 10^{-3}$ basta igualar a expressão anterior a esta amplitude. Portanto $0,5 \times 10^{-3} = 1/2^{n-1}$. Então, podemos concluir que precisamos de 12 elementos para obter a amplitude pretendida. (RT2)

Os restantes alunos parecem estar ainda distantes deste nível de compreensão, uma vez que recorrem à construção sucessiva de todos os elementos da sequência (embora alguns pares só tenham começado a construí-los a partir do 7.º elemento aproveitando os que já estão no enunciado) utilizando a estratégia da questão anterior, até encontrar um que verifique as condições estabelecidas. Neste caso apresentam os cálculos organizados numa tabela. Este aspecto da generalização é discutido, depois, em grande grupo.

Na última questão desta tarefa, os alunos têm uma outra equação não linear para resolver mas que está contextualizada num problema. É com facilidade que os alunos interpretam o problema, identificando os dados e a questão e classificando-o como sendo a resolução de uma equação não linear. Apesar disso, por analogia com a primeira questão, o plano inicial dos alunos contempla a resolução analítica da equação, após a substituição das incógnitas pelos respectivos valores dados no enunciado, de forma a simplificar o problema. Para a execução deste plano os alunos recorrem à manipulação algébrica e tentam, sem sucesso, isolar a incógnita na equação. No entanto, já não insistem muito tempo nesta estratégia e consideram um novo planeamento utilizando a representação gráfica e as potencialidades da máquina de calcular para encontrar uma solução aproximada para a equação. A execução deste plano é cumprida com relativo desembaraço, sobretudo se comparado com o que se observa na primeira questão. A atitude dos alunos em relação à utilização da estratégia gráfica na resolução de problemas altera-se significativamente, provavelmente devido à minha intervenção feita a propósito da exploração da primeira questão desta tarefa. As estratégias observadas e os recursos mobilizados na execução deste plano são também as que os alunos já utilizam na exploração da primeira questão e parecem ser suficientes para resolver o problema, de forma eficiente, através das estratégias planeadas.

Todos os alunos respondem ao problema e há três grupos que apresentam um erro associado à solução encontrada, em forma de intervalo, considerando que o valor encontrado não é exacto. Esta resposta revela o empenho dos alunos na utilização dos conceitos e métodos que são adquiridos recentemente para desenvolverem as suas estratégias. Esta atitude é observada, também, quando alguns grupos, depois de resolverem o problema, procuram estratégias alternativas para a sua resolução e optam por utilizar o algoritmo que deduzem na questão anterior desta tarefa. Apesar desta estratégia não ser a mais eficiente entre as que o aluno tem ao seu dispor para resolver equações não lineares, revela a sua compreensão sobre a utilidade dos métodos numéricos na resolução de problemas sem solução analítica. Este tipo de tentativas revela, igualmente, uma tendência para que os alunos evoluam na compreensão dos processos de resolução de problemas, como é natural, à medida que vão adquirindo mais experiência. No entanto, esta procura de estratégias alternativas não é realizada por todos os alunos e parece não estar relacionada com uma atitude reflexiva sobre a sua eficiência mas com a insistência da professora em salientar esse processo na discussão da primeira tarefa. Alguns pares ainda interpretam o resultado no contexto do problema mas nenhum verifica os cálculos, talvez porque confiam nos resultados obtidos através da máquina de calcular e nas estratégias alternativas que os confirmam. Continua, assim, a ser pertinente uma referência a estes aspectos na fase de discussão.

Os ritmos de trabalho dos diversos pares dentro da sala de aula são muito diferentes. Este facto, aliado às dificuldades que os alunos enfrentam e que estão já descritas, faz com que os 100 minutos disponibilizados para a exploração desta tarefa não sejam suficientes. No final das duas aulas de 50 minutos, o trabalho realizado pelos alunos ainda está pouco desenvolvido e, apesar das dificuldades iniciais, surgem várias estratégias de resolução cuja exploração considero ser importante. Assim, a exploração da tarefa estende-se por mais uma aula de 50 minutos.

Relatório da tarefa. Depois de terminada a exploração desta tarefa e à semelhança do que acontece na anterior, os alunos elaboram o respectivo relatório escrito em período extra-lectivo. Os relatórios de alguns pares continuam pouco desenvolvidos e focados na apresentação dos 'resultados mais correctos', pelo que os meus comentários escritos são no sentido de salientar a necessidade de indicarem não só as conclusões mas também todo o trabalho de exploração. Apesar disso, a descrição de procedimentos e raciocínios é efectuada com mais facilidade e de um modo mais completo do que na tarefa anterior. No entanto, noutros pares, já se verifica um progresso significativo na descrição do trabalho realizado, uma vez que apresentam não só as estratégias que pensam serem as correctas mas também aquelas que exploram e que consideram menos bem conseguidas ou que não os conduzem a um resultado. Para isso, parecem ter contribuído os meus comentários aos relatórios da primeira tarefa e cuja importância os próprios alunos reconhecem:

> Vamos tentar explicar todos os passos de forma explícita de modo a que não surjam dúvidas à professora no acto da correcção do trabalho. Esperamos também uma opinião crítica por parte da professora de modo a podermos corrigir os nossos erros e, assim, de trabalho para trabalho melhorar a nossa maneira de pensar, melhorando cada vez mais os nossos trabalhos. (RT2)

A análise dos relatórios revela, também, que a preocupação dos alunos em explicar o modo de obter resultados não se observa na verificação e na justificação dos mesmos. Os alunos continuam a mostrar algumas dificuldades nestes processos, a avaliar pela ausência generalizada de justificações para as estratégias e conjecturas consideradas nas suas explorações. Os testes que realizam às conjecturas que formulam, maioritariamente baseadas na observação e identificação de padrões, também são limitados a poucos casos, geralmente os disponíveis no enunciado e nem sempre permitem a identificação de incorrecções. Só em três relatórios são visíveis tentativas válidas mas pontuais de justificações para as conjecturas formuladas ou para as estratégias seleccionadas para a resolução dos problemas. Nestes casos, os alunos já recorrem a teoremas e propriedades matemáticas conhecidas e utilizam uma linguagem informal, como mostram o exemplo seguinte:

> Simplificando, $2^n = 4000$. Atribuindo valores inteiros a n temos que: $2^{11} < 4000 < 2^{12}$. Como sabemos que 2^n é uma função contínua e crescente, pelo teorema de Bolzano-Cauchy ficamos a saber que, para obter a amplitude desejada, $11 < n < 12$. Como $n \in$ IN (pois é o número de elementos da sequência) então a sequência precisaria de 12 elementos. (RT2)

Embora os meus comentários escritos, a estes relatórios, insistam em questionar os alunos relativamente à utilização destes processos, parece-me necessário voltar a abordar, na discussão alargada, a importância da sua utilização no desenvolvimento do trabalho exploratório.

A generalidade dos alunos considera que esta tarefa tem um grau de dificuldade superior à anterior, conforme expresso nas suas opiniões, no final do relatório. As dificuldades que enfrentam parecem estar relacionadas com os hábitos de trabalho e crenças relativas à Matemática, adquiridos ao longo do seu percurso escolar e que não se adequam ao tipo de trabalho que agora lhes é pedido. Vejamos duas apreciações que podem ajudar a esclarecer este facto:

> Neste trabalho encontrámos mais dificuldades que no primeiro, talvez por pensar que todas as equações são facilmente resolvidas analiticamente. Este trabalho também serviu para provar que não é bem assim. (RT2)

> [Esta tarefa] levou à exploração de outros métodos de resolução que não são tão facilmente descortinados uma vez que não estamos tão habituados à sua utilização. (RT2)

Apesar das dificuldades, os alunos parecem apreciar e compreender o tipo de trabalho que se pretende desenvolver e a sua importância para o desenvolvimento do raciocínio e para a aprendizagem, como expresso em várias opiniões apresentadas no final do relatório desta tarefa:

> Ao realizar este trabalho de investigação percebemos mais uma vez a importância deste tipo de tarefas para uma maior compreensão da matéria que iremos abordar nesta disciplina. Sublinhamos a importância deste tipo de trabalhos onde é necessário raciocinar e aplicar fundamentos teóricos aprendidos no passado enquanto partilhamos as ideias com os intervenientes do grupo, aspecto este que é fundamental para a nossa formação como futuros oficiais de Marinha (…). (RT2)

> Neste trabalho também foi possível aplicar alguns conhecimentos adquiridos até agora na disciplina de Análise Numérica que só vem contribuir para aumentar os nossos conhecimentos. Em suma, trabalhos deste tipo são sempre bem vindos, pois estimulam o nosso espírito crítico e construtivo, ou seja, não aceitar todas as regras que nos são dadas, mas sim pensar nelas e confrontá-las. (RT2)

> Com a experiência ganha na tarefa 1 foi-nos possível estruturar melhor o trabalho e delinear quais os seus objectivos, melhorando erros que cometemos na 1ª tarefa. De certo modo, apercebemo-nos da importância que a realização de um relatório tem na nossa formação, além de aumentar o espírito crítico, aumenta a capacidade de trabalhar em grupo, a capacidade de raciocínio e faz com que percebamos muito melhor a matéria teórica das aulas, pois, como somos nós que vamos encontrar a solução, sabemos todos os passos que tomámos e todos os problemas com que nos deparámos e assim percebemos o porquê das coisas serem assim, coisa que muitas vezes numa simples aula teórica não fica percebida. (RT2)

Discussão da tarefa. Depois da exploração da tarefa segue-se a sua discussão, muito participada por todos os alunos, que dura cerca de 100 minutos. Comunico aos alunos que a discussão segue a ordem das questões, de forma semelhante ao que já acontece na tarefa anterior e houve um par de alunos que se oferece para apresentar, perante a turma, as suas explorações na primeira questão. O representante deste par começa por mostrar as suas primeiras tentativas de resolução analítica da equação e explicar o porquê do abandono desta estratégia em favor da resolução baseada na representação gráfica da função. Descreve depois os procedimentos que utiliza nesta resolução, auxiliado pela máquina de calcular, através das duas estratégias alternativas. Como os colegas parecem ter percebido o que ele expôs, uma vez que a maioria utiliza as mesmas estratégias, a validade destas estratégias não é questionada. As justificações só surjem com a minha intervenção, insistindo na procura de uma argumentação válida para suportar essas estratégias, uma vez que isso está ao alcance dos alunos. Nesta altura, alguns pares mostram relativa facilidade em justificar os procedimentos seguidos, com base em conhecimentos anteriores, que apresentam na forma oral. Aproveito, ainda, para contrariar a ideia errada que os alunos revelam durante a exploração desta questão, sobre a falta de validade matemática das estratégias visuais, salientando a necessidade de as justificar, tal como qualquer outra estratégia.

Terminada a discussão em torno do processo de justificação, alguns pares intervêm também no sentido de apresentar estratégias diferentes destas (descritas na fase de exploração) e já fazem tentativas para as justificar, mesmo antes de serem questionados pelos colegas ou por mim. Este comportamento dos alunos pode indiciar que a sua dificuldade no processo de justificação não respeita só à procura de argumentos mas refere-se principalmente à compreensão da importância e necessidade deste processo no trabalho de exploração das tarefas. As estratégias apresentadas limitam-se às que estão nos relatórios mas servem como ponto de partida para aprofundar e alargar a discussão em torno delas, em particular para abordar a sua eficiência, uma vez que os alunos parecem ver a procura de estratégias alternativas como uma exigência da professora e passam a fazê-lo para obter uma melhor classificação. A discussão permite salientar a importância deste processo como uma fase importante da resolução de problemas, que permite ultrapassar as dificuldades dos seus planos iniciais (por exemplo, a resolução algébrica) ou encontrar uma estratégia mais eficiente (como a gráfica).

Na segunda questão, todos os pares querem mostrar as várias conjecturas que formulam, mesmo que sejam semelhantes às já apresentadas pelos colegas ou as que reconhecem estar incorrectas. No entanto, sigo o critério já utilizado na tarefa anterior e dou início à discussão com um dos pares cujas explorações são mais representativas do trabalho desenvolvido pela turma, expresso nos relatórios, e que permitem abordar os aspectos onde os alunos sentem mais dificuldade. A maioria dos pares efectua generalizações bem sucedidas, ainda que adoptando um carácter recursivo e partindo de situações concretas. Com base no trabalho apresentado pelo par seleccionado, que reflecte este comportamento, desafio os alunos a identificar relações e a expressá-las de um modo mais formal numa lei geral de formação dos intervalos. Tento que se abstraiam do exemplo dado no enunciado, questionando-os: "E se a raiz não for conhecida, que é o mais usual, como poderemos construir os intervalos?". Os alunos envolveram-se bastante nesta discussão e, nas suas intervenções, fazem referência a características importantes relativas ao comportamento da função e a sua influência na selecção de critérios que permitem encontrar uma estratégia geral para construção dos intervalos. Com base no corolário do teorema de Bolzano e em algumas propriedades matemáticas, os alunos justificam os procedimentos usados nessa estratégia e, intuitivamente, constroem o método da bissecção. Aproveito para alargar os seus conhecimentos e introduzir outros métodos, como o da falsa posição (bissecção alterado) e abordar a questão dos zeros múltiplos. A discussão permite, assim, fazer a ponte para a aula expositiva seguinte.

Ainda nesta questão, poucos são os pares que relacionam as mudanças ocorridas na amplitude dos intervalos da sequência fornecida no enunciado com a sua ordem, numa expressão algébrica geral. Solicito a um dos pares que necessita de concretizar todos os elementos da sequência de modo a encontrar a ordem pedida, para apresentar a sua exploração perante a turma. Quando questionados pelos colegas acerca do modo como constroem a sequência, exprimem a relação entre os seus elementos num registo informal e descritivo. Um aluno de outro par sugere, imediatamente, que se estabeleça uma expressão algébrica para representar a relação entre a amplitude de um intervalo e a sua ordem. Segundo afirma, "assim podemos poupar trabalho e dá para mais valores". Nesta base, relembro a importância de procurarem estratégias mais eficientes, também relativamente à generalização de conjecturas e peço-lhes que expressem a relação encontrada em notação simbólica, de modo a que esta adquira um carácter mais formal, o que fazem com facilidade.

Como o trabalho desenvolvido pelos alunos na exploração da última questão é semelhante ao já realizado na primeira, a discussão não se foca tanto nas várias estratégias utilizadas pelos alunos, já discutidas, mas na abordagem de alguns aspectos relativos à utilização de métodos numéricos na resolução de problemas, que não surgem anteriormente. Assim, a partir da apresentação do trabalho de um par de alunos, que utiliza o método iterativo deduzido na questão anterior para obter uma solução, são trabalhadas questões relativas à escolha de um valor inicial e de condições de paragem para este tipo de métodos.

Tarefa 3 – Ajuste de Contas

Apresentação da tarefa. Esta tarefa realiza-se depois do tema da interpolação polinomial ser abordado em aulas expositivas e de resolução de exercícios. Pretendo envolver os alunos numa situação em que é necessário recorrer a conhecimentos prévios de interpolação, com o objectivo de os consolidar. Esta tarefa visa, ainda, estabelecer um elo entre o tópico da interpolação polinomial e o do ajuste de curvas.

A tarefa, propriamente dita, é constituída por duas questões de natureza exploratória e uma questão de carácter mais problemático. Nas duas primeiras questões, os alunos deparam-se com vários conjuntos de dados, fornecidos em tabelas, que representam diferentes comportamentos que devem ser modelados também por diferentes funções. Os alunos devem ser capazes de analisar e identificar esses comportamentos de forma a completar alguns valores omissos das tabelas dadas, através de modelos matemáticos conhecidos (linear, quadrático e exponencial), expressos de forma algébrica. Torna-se, portanto, necessário definir critérios e tomar decisões, com base em conhecimentos anteriores, para seleccionar aquele que melhor caracteriza o referido comportamento dos dados. O objectivo é compreender quais as estratégias e os argumentos que os alunos usam para optar por um modelo e, simultaneamente, introduzir o conceito de regressão linear e o método dos mínimos quadrados, que constitui uma ferramenta ligeiramente diferente da interpolação polinomial. Deste modo, identifica-se, claramente, a possibilidade das explorações dos diversos alunos tomarem direcções distintas, conduzindo a conclusões diferentes.

A última questão também é suficientemente aberta para originar vários percursos de resolução com diferentes graus de desenvolvimento e complexidade para a resposta. Para descrever a relação entre os dois conjuntos de dados fornecidos no enunciado os alunos podem, simplesmente, usar a linguagem natural ou recorrer a conhecimentos prévios para construir um modelo matemático que a represente.

Nesta tarefa, o uso da calculadora e as representações gráficas podem tornar-se significativas, permitindo verificar qual o papel que os alunos atribuem a este tipo de representação ou a sua preferência por outras representações. Deste modo, a tarefa constitui, também, uma oportunidade de utilizar e relacionar diferentes representações.

Exploração da tarefa. Os alunos exploram esta tarefa em duas aulas de 50 minutos, conforme previsto, a trabalhar em pequenos grupos de 3 ou 4 elementos. Oralmente, comunico aos alunos que, contrariamente ao habitual, os relatórios desta tarefa são entregues no final da exploração. Esta alteração deve-se à necessidade de fazer a discussão da tarefa no dia a seguir à sua exploração e vai ao encontro do pedido da generalidade dos alunos que, nesta altura, têm o seu tempo extra-lectivo muito ocupado com uma semana repleta de avaliações a outras disciplinas e com actividades extra-curriculares obrigatórias. Tento também deixar claro que o 'embelezamento' do relatório não é essencial mas aproveito para salientar a importância de explicitarem e justificarem todos os seus raciocínios, mesmo os que são abandonados por não conduzirem a soluções consideradas válidas. Após a distribuição e leitura individual do enunciado, a generalidade dos grupos organiza o seu trabalho atribuindo a cada elemento a tarefa de exploração de uma questão diferente ou de uma estratégia alternativa para a mesma questão, provavelmente por se sentirem pressionados com o tempo. Este facto, acrescido da experiência que os alunos entretanto adquirem na realização deste tipo de tarefas, contribui para o já referido cumprimento do planeamento.

Ao iniciarem a exploração, a maioria dos alunos reconhece que é possível aplicar os seus recentes conhecimentos de interpolação na resolução da primeira questão, chegando mesmo a mostrar alguma decepção e a classificar esta tarefa como um exercício, como evidenciado pelos comentários de alguns alunos:

> As outras tarefas serviam para introduzir assuntos que não conhecemos. Nesta, estamos formatados para aplicar o que aprendemos directamente, é mais difícil. (Aula de exploração da T3)

> Estamos a fazer esta tarefa depois de termos dado interpolação, parece que estamos a resolver um exercício… Podemos aplicar o que aprendemos sobre a interpolação. (Aula de exploração da T3)

Esta reacção parece revelar que a experiência adquirida com a realização das tarefas de natureza exploratória e investigativa anteriores permite, aos alunos, compreender as características do trabalho que se pretende desenvolver com os diferentes tipos de tarefas que lhes são propostas nas aulas.

Apesar disso, como esperado, na primeira questão quase todos os grupos recorre aos seus conhecimentos de interpolação mas aplicam os diferentes métodos, de forma rotineira, sem ter em conta o comportamento dos dados (informação que é determinante para a escolha e justificação desses métodos). Os dados da primeira tabela apresentam um comportamento linear, facilmente observável através das diferenças sempre constantes entre todos os seus valores. Quase todos os grupos optam, correctamente, por interpolar os valores em falta através de um polinómio de Lagrange do primeiro grau, que constroem com base nos dois pontos mais próximos do valor a interpolar. No entanto, nada indica que os alunos tenham identificado um padrão linear para o comportamento dos dados ou que esse facto seja utilizado para formular as suas conjecturas ou justificar as suas estratégias de raciocínio. Apenas um grupo faz referência à linearidade dos dados, que identifica através de cálculos, justificando, assim, a escolha da regra de três simples que utiliza para interpolar os valores omissos. Há ainda um outro grupo que utiliza todos os valores da tabela e constrói um polinómio do 3.º grau, baseado na conjectura, nem sempre correcta, de que quanto maior o grau do polinómio, melhor a aproximação aos dados e menor o erro. De facto, esta conjectura está na base das estratégias de interpolação utilizadas pela maior parte dos grupos nas outras duas tabelas: "Utilizamos todos os pontos possíveis de modo a baixar o erro decorrente da operação" (RT3). O comportamento dos dados nas outras duas tabelas já não é linear e a generalidade dos grupos volta a não considerar esse facto na selecção de estratégias nem na formulação de conjecturas sobre os polinómios a utilizar na interpolação realizada. Um dos grupos, inclusivamente, conjectura que o polinómio de Lagrange, construído a partir de dois nós (linear, portanto), continua a ser adequado para interpolar os valores em falta nas outras tabelas: "No primeiro posto (…) fizemos interpolações pelo método de Lagrange, fazendo interpolações do 1.º grau. No posto 2 e 3 utilizamos a mesma técnica que no posto anterior para acharmos os valores da 4.ª hora" (RT3). Para a construção dos polinómios os alunos recorrem, essencialmente, aos algoritmos dos métodos seleccionados e a cálculos numéricos, por vezes apresentados em tabelas. Parece, pois, que a procura de argumentos para validar as conjecturas é um processo difícil para os alunos mas que começa a ser uma preocupação de alguns grupos.

Dois grupos também tentam confirmar os resultados obtidos para as interpolações, utilizando, para isso, estratégias diferentes. Um grupo recorre à representação gráfica dos pontos para verificar se o valor encontrado através dos cálculos numéricos está dentro do padrão visual esperado: "Utilizámos as propriedades da calculadora para visualizarmos o ponto $x = 40$ e saber o valor real da sua imagem já que as interpolações dão um valor aproximado. O valor real não dista muito da interpolação" (RT3). O outro grupo recorre ao padrão que identifica nos dados da primeira tabela (a que apresenta comportamento linear) para estimar os valores em falta, através de cálculos numéricos: "Para verificar se este resultado está correcto vamos analisar que, de ponto para ponto, a função varia 50 unidades, pelo que facilmente verificamos $140 + 50 = 190$. Logo o resultado obtido pelo polinómio está correcto" (RT3). No entanto, só efectua a verificação dos valores obtidos para esta tabela porque não identifica nenhum padrão para os dados das outras duas. Os restantes grupos, como não verificam os resultados, também não se apercebem de algumas inconsistências nos seus valores, como por exemplo, os valores interpolados não estarem compreendidos entre as imagens dos nós utilizados para a sua interpolação.

Grande parte dos grupos apresenta, ainda, estratégias alternativas para a interpolação. Dessas estratégias, a mais utilizada é a aplicação de um método de interpolação diferente do anterior, por exemplo, o método de Newton: "Outra forma de resolver o problema era aplicar o método de Newton pelas diferenças divididas, pois os valores de t não variam de forma constante" (RT3). Há um grupo, cujo trabalho é descrito mais à frente no caso Carlos, que volta a considerar o comportamento dos dados e, baseado na definição e nas propriedades básicas dos polinómios, interpola os valores da tabela. Um outro grupo ainda recorre às potencialidades da máquina de calcular para visualizar os dados e obter funções aproximadas para os representar e, a partir delas, interpolar os valores em falta: "Para resolver esta questão também podemos recorrer à máquina de calcular gráfica, com a qual podemos obter uma equação de um polinómio aproximado da função que passa pelos pontos dados. (…) Observando os gráficos dos pontos dados, reparámos que se assemelha com um gráfico de um polinómio do 3.º grau." (RT3). Como esta estratégia é bastante inesperada, porque os alunos ainda não têm conhecimentos sobre o ajuste de curvas, questiono-os sobre a fonte desse conhecimento e a resposta indica que é um assunto trabalhado na disciplina de Química, em anos de escolaridade anteriores. Este facto revela que os alunos são capazes de mobilizar os conhecimentos anteriores e aplicá-los a novas situações. É também um aspecto a aprofundar, na aula de discussão, pois permite fazer a ligação entre dois tópicos programáticos: a interpolação polinomial e o ajuste de curvas. Estes exemplos salientam, igualmente, tentativas de justificação de conjecturas e de estratégias de resolução que surgem na exploração das estratégias alternativas.

O enunciado ainda solicita, nesta questão, uma investigação sobre os modelos adequados para descrever o comportamento dos dados apresentados nas tabelas. Grande parte dos grupos não responde ou limita a sua resposta aos polinómios que constroem para interpolar os valores em falta nas tabelas, sem ter em conta o comportamento dos dados. Só os dois grupos referidos anteriormente, que utilizam a visualização dos dados para basearem as suas estratégias alternativas, conjecturam sobre os modelos pedidos e encontram as suas expressões algébricas. Um dos grupos obtém essas expressões directamente da máquina e o outro grupo opta por construí-las a partir de cálculos numéricos baseados nos conhecimentos recentemente adquiridos. Em qualquer destes casos, a justificação das conjecturas formuladas é baseada na representação gráfica, como referem: "Para começar fizemos um diagrama de dispersão (com os valores dos três postos) para tentar perceber a relação entre os valores e ter uma ideia da possível função que representasse o crescimento populacional" (RT3).

Os alunos revelam, assim, muitas dificuldades e incompreensões sobre este tema da interpolação, que os levam a cometer bastantes erros na formulação das suas conjecturas. Considero, por isso, que é necessário voltar a abordar este assunto na fase de discussão, salientando o papel que a representação gráfica dos dados pode ter na identificação de padrões no seu comportamento.

Na segunda questão, quase todos os grupos começam por organizar os dados em tabelas e recorrem à máquina de calcular para obter as imagens desses valores através das expressões algébricas dos modelos propostos. Conjecturam, então, que o modelo mais adequado para descrever o comportamento dos dados é aquele cujas imagens se afastam menos dos valores fornecidos. Para efectuarem esta análise comparativa surgem, essencialmente, duas estratégias de resolução: uma baseada na representação gráfica dos dados, mais intuitiva e outra analítica, baseada em cálculos numéricos e que a generalidade dos alunos considera melhor porque acham que é mais exacta. Só um dos grupos opta por representar graficamente as funções fornecidas no enunciado para depois as comparar, visualmente, em termos de proximidade aos dados. Com base nesta análise, os alunos eliminam, imediatamente, a função linear, dado o seu grande afastamento relativamente aos dados. No entanto, quando têm que decidir entre as outras duas funções, as diferenças visuais entre os seus gráficos já não são suficientes para justificar a decisão e, por isso, procuram um critério mais "rigoroso", baseado em cálculos, que apresentam também em tabelas. Assim, calculam as diferenças entre os dados fornecidos e os respectivos valores obtidos através das funções e usam-nas como critério para seleccionar a que apresenta uma diferença média menor, como pode ser observado nos exemplos apresentados, com maior detalhe, no caso Carlos.

Os restantes grupos iniciam o trabalho de exploração desta questão com a construção de uma tabela onde apresentam os dados e os respectivos valores obtidos a partir das expressões algébricas das funções dadas, com base nos quais efectuam a análise comparativa dos três modelos. Para essa análise já utilizam diversas estratégias, apesar de todas terem como base as diferenças entre os valores obtidos e os dados fornecidos no enunciado. O exemplo seguinte mostra uma das estratégias observadas, em que os grupos utilizam as referidas diferenças e seleccionam o modelo que tem mais valores próximos dos dados:

t	1	2	3	4	5	6	7
a)(t)	593	700	971	1406	2005	2769	3695
b)(t)	182	700	1218	1736	2254	2772	3290
c)(t)	529.14	714.27	964.16	1301.4	1756.8	2371.4	3201.1
f(t)	550	750	1000	1400	2000	2700	3750

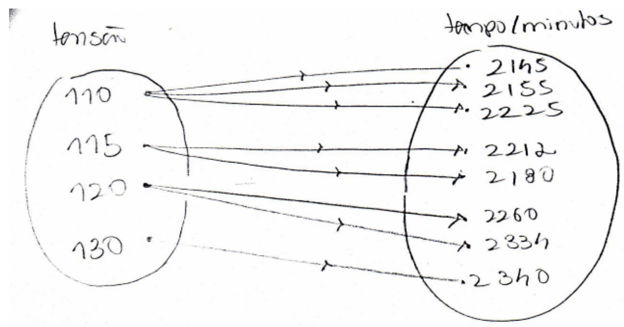
> Comparando os 3 modelos com os dados iniciais, temos:
>
> Pelo modelo em c) obtemos 2 valores mais próximos dos dados iniciais (529 e 714), isto quando comparado com os outros dois.
>
> Pelo modelo em a) obtemos 5 valores mais próximos dos iniciais (971, 1406, 2005, 2768 e 3695).
>
> Assim, podemos concluir que o modelo que mais se aproxima é o modelo em a), pois possui mais valores próximos dos iniciais. (RT3)

No entanto, a maioria dos grupos cria um critério para a escolha do modelo mais adequado baseado no módulo dessas diferenças: “Fizemos a diferença entre os valores observados e os valores que nos eram dados no enunciado. Após calculado o módulo das diferenças, vimos qual das funções apresentava menores ‘discrepâncias’, no total” (RT3). É, portanto, com agrado que observo que os alunos são capazes de, intuitivamente, desenvolverem conceitos e procedimentos ainda não trabalhados. Ao utilizarem esta estratégia, baseada na minimização das distâncias entre os valores dados e os obtidos através dos modelos, para a escolha do mais adequado, os alunos deduzem o método dos mínimos quadrados que serve de base ao ajuste de curvas. Depois de tomada uma decisão sobre o modelo mais adequado, grande parte destes grupos também utilizam a representação gráfica para a confirmação de resultados, como revela o seguinte comentário no trabalho de um dos grupos: “Ocorreu a ideia de analisar o comportamento dos gráficos a) e c) visualizando também a nuvem de pontos, utilizando as capacidades gráficas da calculadora. A interpretação dos gráficos só veio reforçar a ideia inicial que o gráfico c) afasta-se mais da nuvem de pontos” (RT3). A atitude dos alunos, em relação à procura de estratégias de verificação e de argumentação para validar as conjecturas formuladas e os resultados obtidos, parece estar a alterar-se, embora ainda haja grupos que estão distantes deste nível de compreensão. Como nesta situação não está ao alcance dos alunos a descoberta de um argumento que vá além da evidência proporcionada pela representação gráfica que utilizam, este aspecto é abordado formalmente durante a discussão em grande grupo.

Os alunos mostram facilidade na utilização da máquina de calcular, que se revela uma ferramenta auxiliar imprescindível na exploração desta questão, dado que permite efectuar cálculos de forma eficiente, visualizar os dados e os gráficos dos modelos propostos e relacionar as suas diferentes representações (algébrica, tabelar e gráfica). De facto, esta capacidade dos alunos relacionarem diferentes representações é bem evidenciada no comentário seguinte do trabalho de um grupo que recorre também à representação gráfica como estratégia de confirmação do resultado obtido com base nas diferenças entre os valores dados e os calculados: "Ao visualizar os dados, reparámos que a nuvem de pontos fazia lembrar uma parábola. Ou seja, a curva que melhor se ajustava aos pontos (nuvem de pontos) era certamente uma parábola. Concluímos, assim, que a expressão que melhor descreve os dados é [a dada em] a)" (RT3).

Na última questão, os alunos, a trabalhar em grupo, observam os dados da tabela e exploram a possibilidade de representar a informação dada através de um modelo matemático (função). No entanto, perante a correspondência apresentada, deparam-se com um obstáculo à construção do referido modelo que está relacionado com o seu conceito de função: correspondência entre dois conjuntos de valores, que pode ser representada num gráfico cartesiano e em que para cada abcissa só existe uma ordenada. Um grupo chega mesmo a utilizar um diagrama de setas para representar os dados e, desse modo, justificar que a correspondência apresentada não pode ser considerada uma função:

> Inicialmente temos que a um objecto faz corresponder mais do que uma imagem, da forma como nos é apresentado os dados. Para a representação de um gráfico [de uma função] isto seria impossível.



(RT3)

Parece, pois, que a generalidade dos alunos é capaz de avaliar a viabilidade da estratégia de resolução proposta antes de a executar e, caso identifiquem dificuldades na sua aplicação procuram outras estratégias alternativas. Isto revela uma alteração ao comportamento que apresentam na resolução de problemas nas primeiras tarefas.

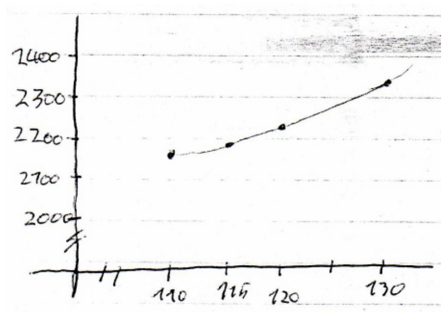
Todos os grupos modificam o problema original, através da redução dos dados a quatro valores, adequando-os ao seu conceito de função. Usam cálculos numéricos para estimar a média dos tempos (imagens) para cada tensão (objecto) e constroem tabelas para registar os seus resultados, como mostra o exemplo seguinte:

O tempo seria calculado através da média, ou seja:

X	110	115	120	130
Y	$\frac{2145+2155+2225}{3}=$ 2175	$\frac{2212+2180}{2}=$ 2196	$\frac{2260+2334}{2}=$ 2297	2340

(RT3)

Nesta fase é possível observar dois tipos de percurso. Com base apenas na observação dos valores das médias calculadas, a maioria dos grupos descreve a relação entre a voltagem e o tempo da seguinte forma, utilizando a linguagem natural, como no exemplo seguinte: “Observando a tabela acima, verificamos que, no geral, para valores cada vez maiores de X temos valores cada vez maiores de Y. Assim, podemos dizer que quanto maior a voltagem (X), maior será o tempo de funcionamento da máquina (Y)” (RT3). Dois destes grupos têm a preocupação de confirmarem a tendência crescente descrita, apresentando uma representação gráfica dos valores encontrados:



> Como a função é crescente, em média, podemos concluir com este gráfico que com o aumento da tensão o tempo de funcionamento iria aumentar. (RT3)

Os grupos dão, assim, por terminada a resolução do problema, sem explorarem outras estratégias alternativas, possivelmente porque não encontram nenhuma disponível. Há, no entanto, dois grupos de alunos que continuam a exploração e desenvolvem estratégias alternativas mais completas que permitem não só descrever mas também quantificar a relação entre as duas variáveis em questão e modelar adequadamente o comportamento dos dados. Para isso, recorrem aos seus conhecimentos anteriores e às capacidades da máquina de calcular. O excerto seguinte exemplifica bem a estratégia escolhida por estes dois grupos:

> Outra maneira de descrever a relação entre duas variáveis é classificar essa relação em 'forte' ou 'fraca'. Isto pode ser feito recorrendo à correlação entre duas variáveis, medida pelo coeficiente de correlação (r), usando a fórmula (…). A relação entre as variáveis pode ser descrita como forte, consoante r esteja mais próximo de -1 ou de 1, e como fraca se r estiver próximo de zero. (…) Portanto, a correlação é fraca [baseado na observação, r = - 0,3], isto é, não existe grande dependência entre as duas variáveis. (RT3)

x	y	x^2	y^2	xy
110	2145	12.100	4.607.025	235.950
110	2155	12.100	4.644.025	237.050
110	2225	12100	4.950.625	244.750
115	2212	13.225	4.892.944	254.380
115	2180	13.225	4.752.400	250.700
120	2.260	14.400	5.107.600	271.200
120	2.334	14.400	5.447.556	280.080
130	2.340	16900	5.475.600	304.200

$n = 8$

$\Sigma x = 950 \quad \Sigma y = 17.851$

$\Sigma x^2 = 108.450$

$\Sigma y^2 = 34.968.975$

$\Sigma xy = 2.078.310$

$$r = \frac{2.078.310 - \frac{950 \times 17.851}{8}}{\sqrt{\left(108450 - \frac{950^2}{8}\right)\left(34968975 - \frac{17851^2}{8}\right)}} = \frac{-41.496,25}{145.657,61} = -0,3$$

Neste exemplo pode observar-se que, apesar deste grupo utilizar a máquina de calcular como ferramenta auxiliar dos cálculos, não recorre às suas potencialidades para encontrar o valor do coeficiente de correlação de forma eficiente e organiza e apresenta os cálculos numa tabela. Deste modo, a resolução do problema é demorada, requer muitos cálculos envolvendo números grandes e o resultado obtido apresenta-se incorrecto. Como estes alunos não utilizam qualquer estratégia de verificação da resposta, por exemplo, comparando com o resultado da estratégia anterior ou através da análise da representação gráfica dos dados, não identificam o erro e a resposta mantém-se incorrecta e contraditória em relação à estratégia utilizada anteriormente.

Pelo contrário, o outro grupo que utiliza esta estratégia, apenas apresenta o resultado final destes cálculos, uma vez que o obteve através da máquina de calcular mas mostra a sua concordância com o resultado obtido com outra estratégia: "Fomos calcular o parâmetro estatístico do erro, r^2, recorrendo às capacidades da calculadora e obtivemos r^2 = 0,9041. Como este valor está próximo da unidade, podemos concluir mais uma vez que o aumento da tensão está relacionado com o aumento do seu funcionamento" (RT3). Recorrendo mais uma vez às potencialidades da máquina de calcular, este grupo aprofunda ainda mais a exploração e tenta encontrar uma expressão analítica para descrever a relação: "Decidimos também determinar (recorrendo às capacidades gráficas da calculadora) a equação da recta que melhor se ajusta à nuvem de pontos, ou seja, à experiência. Fazendo uma regressão linear obtivemos uma recta $y = 8{,}82x + 1204{,}28$" (RT3). No entanto, não justificam a escolha deste modelo nem mostram sinais de reflexão sobre a eficiência das estratégias que apresentam.

Relatório da tarefa. Contrariamente ao procedimento adoptado em relação às restantes tarefas e por causa das já referidas limitações na gestão do tempo, os alunos elaboram o relatório escrito desta tarefa durante a aula de exploração. Por isso, a maioria dos relatórios reflecte a organização de trabalho que os alunos adoptam durante a exploração da tarefa e a distribuição de tarefas entre si. De facto, o texto dos relatórios é escrito a 'várias mãos' e mostra uma compilação de explorações individuais ou a pares, contributos dos vários elementos do grupo. Na maior parte dos grupos, a divisão do trabalho é feita no sentido de apresentar diversas estratégias para a mesma questão. No entanto, há outros grupos em que é clara uma divisão por pergunta. Apesar disso, este aspecto, conjugado com a experiência adquirida na realização deste tipo de tarefas, pode também ter contribuído para que a generalidade dos relatórios desta tarefa, embora pouco organizados e menos elaborados em termos visuais, se apresentem mais 'autênticos' e completos no que diz respeito à descrição de procedimentos e raciocínios, em relação aos relatórios das tarefas anteriores. O exemplo seguinte evidencia bem a preocupação que os alunos têm em descrever e justificar os seus raciocínios quando todo o trabalho é apresentado, em vez de mostrarem só os resultados finais ou 'mais correctos':

$$P_2(x) = L_0 \times f(x_0) + L_1 \times f(x_1)$$

esta operação não se aplica pois $x_0 - x_0$ é zero e como $x_0 - x_0$ é o denominador da operação então esta não é aplicável.

$$L_0(4) = \cancel{\frac{x - x_0}{x_0 - x_0}} \times \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{4-5}{3-5} = \frac{1}{2}$$

aplica-se o mesmo princípio aplicado em $L_0(4)$

$$L_1(4) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \times \cancel{\frac{x - x_1}{x_1 - x_1}} = \frac{4-3}{5-3} = \frac{1}{2}$$

(RT3)

De facto, a análise dos relatórios mostra uma evolução, ainda que diferenciada entre os vários grupos, no que diz respeito à descrição do trabalho realizado. Em todos os relatórios é visível a preocupação dos alunos em mostrar e descrever as estratégias que utilizam na obtenção de resultados. Relativamente à verificação e justificação de conjecturas, os alunos continuam a mostrar bastantes dificuldades, embora a presença destes processos nos relatórios já seja mais frequente e, nalguns casos, a sua utilização seja adequada e bem sucedida. Apenas um relatório é caracterizado pela ausência generalizada de justificações para as explorações realizadas. Embora os meus comentários escritos, a estes relatórios, insistam em questionar os alunos relativamente à utilização destes processos, parece-me necessário voltar a abordar, na discussão alargada, a importância da sua utilização no desenvolvimento do trabalho exploratório.

A maioria dos grupos também já procura diferentes estratégias de exploração para as várias questões e apresenta não só as estratégias que pensam serem as correctas mas também aquelas que exploram e que consideram menos bem conseguidas ou que não os conduzem a um resultado. Nalguns grupos, este comportamento ainda surge não por considerarem um processo necessário ou importante para a exploração da tarefa mas porque têm a percepção de que podem obter uma classificação melhor no relatório. No entanto, já se observam alguns grupos (uma minoria) a utilizarem diferentes estratégias para confrontarem resultados, como já mostrado anteriormente. Por isso, os meus comentários a esta tarefa já são no sentido do aprofundamento de algumas questões, mais do que na procura de estratégias alternativas. Por exemplo, na última questão, os comentários questionam sobre a possibilidade de caracterizar a relação entre os dados através de um modelo matemático.

As dificuldades que os alunos enfrentam nesta tarefa parecem estar relacionadas com a falta de compreensão de conceitos e procedimentos recentemente adquiridos mas que os alunos tentam aplicar numa nova situação. A análise dos comentários apresentados no final do relatório desta tarefa parecem indicar que o objectivo de consolidação de conhecimentos, definido para esta tarefa, é pertinente, como mostra o exemplo seguinte: “Este trabalho foi positivo porque podemos consolidar algumas matérias que aprendemos anteriormente e que não estavam clarificadas” (RT3).

Discussão da tarefa. A discussão desta tarefa realiza-se no dia seguinte à sua exploração, em duas aulas de 50 minutos, onde procuro que os alunos apresentem as diferentes estratégias que identifico durante a observação da aula de exploração e na análise dos relatórios escritos. A discussão segue, mais uma vez, a ordem com que as questões aparecem no enunciado mas a selecção dos grupos (representados por um aluno) que apresentam o seu trabalho oralmente, perante a turma, é feita de acordo com o grau de desenvolvimento das explorações apresentadas nos relatórios. Assim, começo a discussão da primeira questão por um grupo que aplica rotineiramente os métodos de interpolação, sem ter em conta o comportamento dos dados, de forma a criar oportunidades para que os colegas avaliem as estratégias utilizadas, coloquem questões e proponham estratégias alternativas mais adequadas e/ou eficientes. A discussão é bastante participada por todos os alunos e o meu papel é essencialmente de moderadora, pois as questões colocadas são bastante pertinentes e conduzem a uma reflexão e à necessidade de justificações. A intervenção dos colegas parece influenciar uma mudança de atitude dos alunos face à argumentação pois, a partir de certa altura, eles já fazem tentativas para justificar as diferentes estratégias e procedimentos que apresentam, mesmo antes de questionados pelos colegas ou por mim. Durante esta interacção, os alunos sentem também a necessidade de representar graficamente os dados e, com base nessa representação, tomam decisões sobre as estratégias mais adequadas a utilizar e justificam-nas. é também discutida a verificação de resultados e a sua importância no processo de resolução, uma vez que isso permite identificar erros cometidos e seleccionar estratégias alternativas mais adequadas e eficientes. Este processo acaba também por surgir do questionamento dos colegas que têm resultados diferentes dos apresentados.

No final desta questão, os alunos parecem ter compreendido a relação entre a escolha dos métodos de interpolação e o comportamento dos dados e abandonaram a ideia de que, quantos mais pontos utilizam, melhor a interpolação obtida. O comentário seguinte, feito por um aluno durante esta fase de discussão, revela que esta discussão permitiu esclarecer as dúvidas e consolidar os seus conhecimentos sobre interpolação e compreender que o facto de utilizarem conhecimentos recentemente adquiridos não altera a natureza do trabalho que se pretende desenvolver com este tipo de tarefa: "Professora, afinal esta tarefa não era só um exercício… Havia muita coisa de interpolação que nós não sabíamos ainda, mas só agora é que percebi" (Aula de discussão T3).

Quase todos os grupos utilizam as mesmas estratégias para resolver a questão seguinte. Por isso, com base numa exploração representativa do trabalho desenvolvido pela turma, apenas se discute sobre os diferentes critérios utilizados na escolha do melhor modelo. Aproveito o contexto proporcionado por esta discussão para introduzir o tópico da regressão linear e apresentar formalmente o método dos mínimos quadrados. Os alunos vêm, assim, surgir as justificações para o trabalho desenvolvido por eles de forma intuitiva mas que não lhes é acessível. Outro aspecto que considero pertinente incluir na discussão desta questão é a importância de se utilizar e relacionar diferentes representações, o que é feito a partir do trabalho de exploração do grupo que utiliza, como base da sua argumentação, a relação entre a representação gráfica e a algébrica.

A discussão da última questão é influenciada pelo trabalho desenvolvido com toda a turma em torno das questões anteriores desta tarefa. Assim, quando solicito a um dos grupos, cuja exploração se limita à descrição informal da tendência dos valores médios calculados a partir dos dados, que apresente as suas estratégias de resolução, regista-se o seguinte diálogo:

> Aluno: Nós fizemos de uma maneira mas agora já sabemos outra melhor. Posso apresentar antes essa?
>
> Prof.ª: Porque é que consideram a nova estratégia de resolução melhor?
>
> Aluno: Porque agora já conseguimos explicar a relação entre os dados com uma recta, em vez de ser só olhando para as médias.

> Prof.ª: E porque é que utilizam uma recta?
>
> Aluno: Ah, isso é porque se fizermos o gráfico… (faz a representação gráfica dos dados) Os pontos estão a crescer em linha.
>
> Prof.ª: E como é encontram essa recta?
>
> Aluno: Como a professora explicou, usando a regressão.

Apesar de algumas incorrecções na linguagem, o aluno mostra compreender a utilidade da regressão e é capaz de relacionar a escolha dos modelos a ajustar com o comportamento visual dos dados. Depois, tento aprofundar a compreensão dos alunos relativamente às diferenças entre a interpolação e a regressão, onde habitualmente observo dificuldades. Finalmente, faço a ponte para a aula expositiva seguinte onde vou abordar o ajuste de funções não lineares.

Tarefa 4 – Águas paradas

Apresentação da tarefa. Esta última tarefa é realizada antes de abordar a integração numérica e apresenta algumas características distintas das anteriores. O seu enunciado inclui uma figura que acompanha uma única questão de natureza aberta e que possibilita o aparecimento de diferentes explorações susceptíveis de conduzir os alunos a diferentes conclusões e que reforçam as aprendizagens desenvolvidas relativamente a conceitos e métodos já estudados. Os alunos são solicitados a calcular o valor do integral de uma função, embora o termo não seja usado até eles próprios o introduzam no seu trabalho. O objectivo é analisar como é que os alunos interpretam uma situação problemática contextualizada em assuntos familiares e quais as estratégias e representações a que recorrem para a resolver. Além disso, pretendo avaliar a sua compreensão relativamente à utilização de diversos processos matemáticos e verificar quais os conhecimentos que mobilizam e como os aplicam a uma nova situação. O trabalho nesta tarefa constitui, ainda, o ponto de partida para o desenvolvimento e formalização dos métodos numéricos de integração, levando os alunos a compreender a sua fundamentação.

Exploração da tarefa. Os alunos exploram esta tarefa ao longo de duas aulas de 50 minutos, conforme planeado, a trabalhar em pequenos grupos de 3 ou 4 elementos. Após a distribuição e leitura individual do enunciado, os alunos partilham, dentro do seu grupo, a interpretação que fazem da situação apresentada e organizam-se depois para encontrarem estratégias diferentes para a explorar.

A generalidade dos grupos começa a exploração da tarefa conjecturando que a área aproximada da secção transversal do rio, descrita no enunciado, corresponde ao valor do integral da função que delimita a figura que a representa. Esta conjectura tem por base a analogia que os alunos fazem com outros problemas e/ou exercícios em que o cálculo de áreas é realizado, essencialmente, através de integração. Assim, planificam a aplicação dos conhecimentos recentes de interpolação ou de ajuste de curvas para encontrar uma função que defina inferiormente a secção do rio representada no enunciado e, com base na sua expressão algébrica, calcular a área da referida secção. Deparam-se, no entanto, com a falta de dados disponíveis quando pretendem executar esta estratégia, situação que suscita, nos alunos, algumas dúvidas sobre a interpretação do enunciado e da figura que o acompanha. O comentário escrito de um dos grupos ajuda a esclarecer essas dificuldades:

> (…) Pensou-se em aproximar a curva que delimita inferiormente a área utilizando uma regressão polinomial e de seguida resolver um integral com a função obtida para descobrir a área. Para isso precisaríamos de pontos, informação da qual não se dispunha. Poder-se-ia tentar supor que a figura era uma representação fiel do fundo do rio. Por isso, no primeiro ponto sentimos alguma dificuldade em interpretar o enunciado visto não termos a certeza se a imagem era uma representação fiel da secção do fundo do rio ou se era uma mera ilustração exemplificativa de como o fundo do rio poderia ser. (RT4)

Este comportamento dos alunos indicia uma plena compreensão dos conceitos e métodos de interpolação polinomial e de ajuste de curvas, depois do trabalho desenvolvido nas duas tarefas anteriores, uma vez que já têm em conta o comportamento dos dados para seleccionar adequadamente a função a ajustar ou a construir. De facto, o que muitos alunos parecem não compreender, de imediato, é que os dados necessários à resolução da situação estão todos no enunciado mas que têm que assumir pressupostos e que para isso é essencial observar a figura. Como surgem vários grupos a colocar questões, opto por esclarecer oralmente, para toda a turma, que a figura é apenas uma representação para auxiliar a compreensão do enunciado. Nessa altura, e uma vez que a estratégia inicial não lhes permite obter uma solução, todos os grupos optam por utilizar figuras geométricas como base para o cálculo aproximado da área da figura, evidenciando uma evolução na capacidade para avaliar estratégias e seleccionar outras alternativas. É notório o desembaraço geral na procura de estratégias alternativas, sobretudo se comparado com o que se observa nas primeiras tarefas.

Os alunos continuam a explorar esta tarefa e formulam várias conjecturas, embora não simultâneas, sobre as figuras geométricas a utilizar no cálculo da área da figura representada no enunciado. A conjectura inicial, escolhida pela maioria dos grupos, considera que a área da figura pode ser aproximada (por excesso) pela área do rectângulo que a contém, cujas dimensões são os valores máximos de largura e profundidade fornecidas no enunciado. Há, no entanto, um grupo que utiliza o mesmo raciocínio mas considera as dimensões mínimas para o rectângulo que aproxima o valor da área (neste caso, por defeito). Apenas um dos grupos opta por aproximar a área da figura a partir do cálculo da área de um trapézio, considerando também as dimensões fornecidas pelo enunciado. Os exemplos seguintes ilustram bem os processos seguidos pelos alunos:

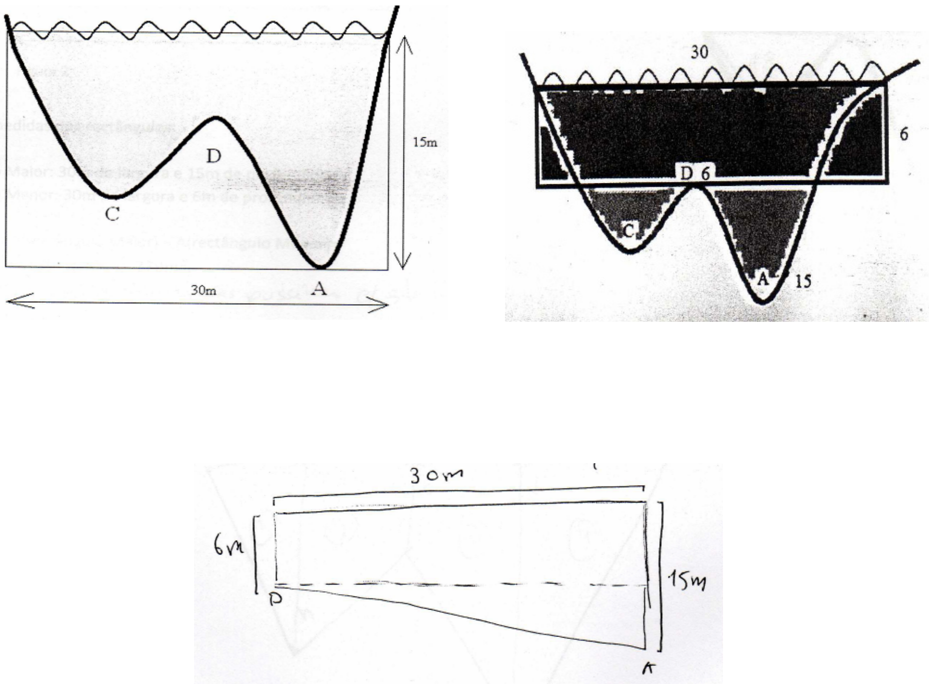


Figura 5.3 – Estratégias utilizadas pelos alunos para o cálculo da área da figura (RT4)

Com base nestas figuras, os alunos avaliam visualmente a eficiência das estratégias utilizadas e a exactidão dos resultados obtidos e todos os grupos refinam as conjecturas formuladas anteriormente, no sentido de obterem soluções cada vez mais aproximadas da área da figura dada. Os alunos estão cientes da existência de erros associados às soluções obtidas através de cada uma das estratégias que utilizam e da importância de os eliminar ou diminuir. No entanto, não os quantificam, nem os comparam numericamente, pois estão muito focados no conceito de erro verdadeiro e a sua utilização, neste caso, não é possível. Apesar de fazerem uma avaliação visual, este empenho em avaliar resultados e procurar estratégias mais eficientes revela uma evolução significativa em relação ao que se observa nas tarefas anteriores. Os alunos parecem ter percebido esta ideia e a importância desta fase no desenvolvimento do trabalho investigativo, discutida a propósito da tarefa anterior.

As novas conjecturas propõem que a referida área seja obtida através da soma das áreas de várias figuras geométricas elementares combinadas, cujas áreas são conhecidas e mais fáceis de calcular (rectângulos, triângulos e trapézios). Nessa altura, observa-se que as estratégias escolhidas para o cálculo da área apresentam-se, geralmente, correctas e utilizam de uma grande variabilidade de formas geométricas (figuras elementares e combinações entre elas). Esta variabilidade surge não só entre os diferentes grupos, como é esperado, mas também dentro deles, como resultado do contributo individual dos seus vários elementos. Além disso, observa-se uma alteração de comportamento dos alunos em relação às estratégias e conjecturas apresentadas, uma vez que o seu elevado número não tem como único objectivo satis\fazer um requisito da professora e a obtenção de uma classificação mais elevada no trabalho mas surge da tentativa dos alunos refinarem as suas conjecturas.

Nota-se, também, uma evolução na atitude dos alunos em relação ao processo de justificação de conjecturas. De facto, todos os grupos evidenciam uma grande preocupação em justificá-las, embora, neste caso, só possam fazê-lo com base nas figuras que desenham e que acompanham com descrições detalhadas, em linguagem natural, dos seus raciocínios e dos pressupostos que têm que assumir quando não têm dados suficientes para aplicar as estratégias planeadas. Estes pressupostos estão muito ligados à figura dada no enunciado, considerando-a uma representação, à escala, da realidade, como refere um dos alunos: "Depois de alguma discussão decidiu-se encarar a imagem como uma fiel representação porque a informação do enunciado pareceu-nos escassa e insuficiente". Esta decisão pode ter sido influenciada pelo modo como é dada a informação no enunciado, uma vez que os alunos recorrem à observação das propriedades visuais da figura e estabelecem conexões com os dados fornecidos: "Com a informação adicional que nos foi fornecida apercebemo-nos que a imagem poderia ser fiel pois o ponto que nos foi dado era confirmado visualmente pela figura" (RT4).

Alguns grupos resolvem ir um pouco mais longe nas suas explorações voltando atrás e recuperando a primeira conjectura formulada, uma vez que, com base nos pressupostos entretanto assumidos, já tem disponíveis os dados que precisam para calcular a área através de integração. Para isso, recorrem à máquina de calcular e aos seus conhecimentos de ajuste de curvas para obter, de forma eficiente, uma expressão algébrica para a função que define inferiormente a figura do enunciado e calculam o valor do seu integral. Nesta fase, observa-se que os alunos fazem uma análise que envolve a observação da figura e relacionam as suas propriedades matemáticas com as das funções. É, deste modo, que justificam a escolha da função a ajustar, explicando o processo em linguagem natural.

Durante a exploração desta tarefa observo uma grande interacção entre os elementos dos grupos, discutindo entre si as diferentes estratégias apresentadas por cada um. Verifico, com agrado, que alguns grupos já manifestam tendência em não aceitar como válidas as conjecturas formuladas pelos colegas e já se questionam uns aos outros, pedindo justificações, antes de aceitarem determinada estratégia. A transcrição seguinte confirma esta observação:

> Ao longo da tarefa todo o grupo se mostrou interessado e participativo, havendo no entanto alguns pontos discordantes em que a discussão foi mais acesa, sendo necessário algum poder de argumentação por parte de alguns membros de modo a convencerem os restantes das suas ideias, o que só veio enriquecer o trabalho de grupo beneficiando o resultado final. (RT4)

Relatório da tarefa. Os relatórios desta última tarefa são elaborados também em grupo mas em tempo extra-lectivo, imediatamente a seguir à sua exploração. Os alunos empenham-se muito neste último relatório, talvez porque as classificações dos anteriores não são muito elevadas e apresentam textos bastante completos onde explicam detalhadamente todo o trabalho que realizam durante a exploração. Este empenho é, aliás, reclamado pelos alunos: "Em comparação com outros relatórios, achámos que este foi o que mais trabalho nos deu" (RT4). Por isso, estes relatórios revelam progressos significativos, também fruto de explorações mais completas. Dou como exemplo, um comentário apresentado no relatório de um grupo que refere: "Apesar das dificuldades, esta actividade mostrou ser bastante interessante permitindo que tentássemos explorar diferentes técnicas e métodos (…)" (RT4).

A forma como os alunos elaboram o relatório representa a sua reacção aos comentários que são feitos, por mim, durante a exploração das tarefas ao longo de todo o semestre, em particular nos relatórios escritos e nas discussões em grande grupo. É manifestamente visível o reconhecimento dos processos matemáticos envolvidos na exploração de tarefas deste tipo. Todos os grupos apresentam várias conjecturas, algumas como resultado do refinamento de formulações iniciais e já mostram preocupação em justificá-las. No seu trabalho usam um conjunto de argumentos que derivam directamente da observação, baseados em figuras geométricas que vão construindo pois, neste caso, não têm à sua disposição outras formas de o fazer. No entanto, continuam a ter grandes dificuldades em expressar-se com um carácter mais formal, recorrendo quase sempre à linguagem natural para descrever os seus raciocínios. As conclusões elaboradas diferem apenas na maior ou menor facilidade de explicação através de uma linguagem matemática adequada e todos os grupos recorrem à apresentação de figuras para os ajudar nessas suas explicações.

Os alunos evidenciam, igualmente, ter adquirido uma maior flexibilidade na escolha e no uso de diferentes estratégias de resolução, pois apresentam várias ao longo das suas explorações e já são capazes de avaliar a sua eficiência na obtenção de soluções mais exactas. Além disso, quando planeiam a resolução através de uma estratégia que não os conduz a uma solução, os alunos são capazes de, autonomamente, optar por uma diferente. O comentário seguinte traduz bem a naturalidade com que a maioria dos alunos já encara a utilização de diferentes estratégias: "Concluímos que não tínhamos dados suficientes para calcular a área verdadeira da secção transversal do rio, mas que havia diversas formas de tentar estimar o valor dessa mesma área. Abordámos o problema de diferentes modos" (RT4). Também o facto de alguns grupos voltarem à primeira estratégia revela que compreenderam a não linearidade deste processo de exploração. As estratégias utilizadas apresentam-se, geralmente, correctas e os conhecimentos mobilizados são os adequados.

Os meus comentários a este último relatório são, sobretudo, de reconhecimento do trabalho desenvolvido e reservo para a fase de discussão as questões sobre alguns aspectos menos aprofundados ou aqueles em que os alunos mostram maiores dificuldades, como é o caso da quantificação do erro. De facto, há alguma evidência da consciência dos alunos relativamente ao facto de múltiplos procedimentos conduzirem a diferentes resultados e, consequentemente, a diferentes erros: "Das diversas aproximações realizadas fomos obtendo diferentes valores, o que implica que umas são mais exactas que outras, isto é, o referido 'erro' varia de acordo com tais aproximações" (RT4). No entanto, esta análise é muito superficial e há alguns relatórios onde este aspecto nem é abordado.

Discussão da tarefa. O entusiasmo dos alunos em participar nas discussões em grande grupo, já verificado nas tarefas anteriores, manteve-se. Como as explorações realizadas pelos alunos são muito semelhantes, diferindo apenas no número de estratégias apresentadas e na sua maior ou menor facilidade de explicação usando linguagem matemática adequada, esta fase de discussão ocupa apenas uma aula de 50 minutos.

A discussão inicia-se com apresentação do trabalho de um grupo, que se voluntaria para o fazer mas dou oportunidade a outros grupos para apresentarem também as suas estratégias, desde que diferentes das anteriores. Os outros grupos questionam algumas estratégias, quando não as compreendem, que são depois explicadas com base em esboços de figuras geométricas feitos no quadro. Ao longo da aula, os alunos defendem variadas ideias e apresentam diversas conjecturas, que justificaram sem ser necessária a minha solicitação. A interacção entre os grupos é grande e, por isso, quando falta alguma justificação há sempre um grupo que complementa o trabalho que está a ser apresentado. Parece, pois, que os alunos interiorizam a necessidade de apresentar argumentos para validar as suas conjecturas.

Esta primeira fase de exploração, em que os alunos se debruçam sobre o cálculo da área da secção do rio representada pela figura do enunciado, não gera grande discussão, uma vez que é consensual, entre os alunos, que a utilização de figuras geométricas é uma estratégia de resolução adequada. O foco da discussão centra-se no cálculo e na análise dos erros, onde observo as maiores dificuldades ou mesmo a sua ausência nos relatórios. As dúvidas têm a ver com a quantificação dos erros pois vários alunos consideram que só tendo o verdadeiro valor é que os podem calcular. Aproveito então para rever e discutir as várias definições de erro abordadas nesta disciplina logo no início do semestre e, portanto, já conhecidas dos alunos. Após alguma discussão em que alguns alunos consideram não ser possível quantificar os erros dos resultados obtidos para a área da figura através das diversas estratégias, um aluno refere (e depois explica perante a turma) que com os rectângulos iniciais consegue enquadrar a área da figura entre dois valores (a que chama "área mínima" e "máxima") e, deste modo, quantificar o erro através de um majorante. Este confronto de ideias faz com que os alunos tentem aplicar o mesmo raciocínio a outras situações e vêm assim surgir várias formas de quantificar o erro associado a certos resultados. O contributo de um dos grupos para a discussão permite, igualmente, que os restantes alunos compreendam o papel dos erros na verificação de resultados: "Professora, assim podemos confirmar se os resultados estão certos. Se esses valores são o mínimo e o máximo para a área, todos os outros têm que estar lá dentro" (discussão T4).

A estratégia utilizada por alguns grupos (e apresentada por um deles perante a turma), de encontrar uma função para representar o fundo da secção do rio e, a partir da sua integração calcular a área da figura, permite introduzir, nesta fase do trabalho, o tópico da integração numérica, uma vez que intuitivamente os alunos já a compreendem.

Síntese do trabalho desenvolvido pelos alunos em torno das tarefas

O trabalho dos alunos nas diferentes fases da realização das tarefas é marcado por diversos aspectos. Assim, de um modo geral, a exploração das quatro tarefas propostas ao longo da experiência de ensino desperta bastante interesse e participação nos alunos. A introdução destas tarefas caracteriza-se por ser muito sucinta e consiste na distribuição dos enunciados escritos que são acompanhados por algumas indicações rápidas relacionadas com a organização do trabalho e não com a tarefa propriamente dita. Após a leitura individual do enunciado, os alunos começam a exploração das tarefas, em grupo, seguindo ordenadamente as questões propostas.

Inicialmente, os alunos encaram as tarefas como simples exercícios, pois quando fazem a primeira descoberta ou encontram uma resposta dão a exploração por terminada ou passam à questão seguinte. As conjecturas, formuladas apenas com base em alguns exemplos, são generalizadas e assumidas como conclusões, de forma imediata. Aliada a esta tendência observa-se, também, que os alunos não procuram, de um modo espontâneo, explicações ou justificações que validem as conjecturas que parecem sempre verdadeiras e só o fazem, ou tentam fazer, quando solicitados por mim. Este comportamento, que tento contrariar, revela a falta de hábito dos alunos em realizar este tipo de trabalho e, por isso, é bastante explorado durante as aulas de discussão das tarefas e evidenciado nos meus comentários aos relatórios escritos. Este tipo de intervenção parece induzir uma mudança de atitude dos alunos que, nas tarefas finais já começam a formular várias conjecturas simultâneas ou de forma sucessiva, no sentido de alargar a exploração da tarefa ou de refinar as iniciais. Além disso, observa-se uma grande preocupação em procurar argumentos que comprovem a veracidade das conjecturas formuladas.

Os alunos mostram, desde o início, facilidade em interpretar as questões mais problematicas propostas e em identificar os dados e são capazes de seleccionar e utilizar as estratégias adequadas para encontrar uma solução. No entanto, não sentem a necessidade de verificar os resultados nem os cálculos e só nas últimas tarefas é visível a existência de múltiplas estratégias e a procura de estratégias alternativas mais eficientes. Ao longo da experiência de ensino, os alunos aprendem, também, a fazer escolhas razoáveis acerca das representações e a estabelecer relações entre essas representações. De facto, da tendência inicial para privilegiar a representação algébrica, que nem sempre permite a obtenção de resultados ou a identificação (e posterior correcção) de erros nas suas explorações, os alunos evoluem para a utilização intencional de diferentes representações. Assim, passam a recorrer com frequência à representação gráfica para visualizar a informação disponibilizada e para obter soluções de forma eficiente. Algumas vezes, estes gráficos servem, igualmente, para explicar os seus raciocínios ou para confirmar resultados obtidos por outros métodos. As figuras geométricas que dominam o trabalho de exploração realizado pelos alunos na última tarefa, são utilizadas, ainda, para apoiar a escolha de estratégias e para explicar e justificar raciocínios. No entanto, é necessário salientar o facto de que, mesmo utilizando outras formas de representação, a generalidade dos alunos faz uma descrição detalhada dos seus raciocínios em linguagem natural.

Durante a fase de exploração da tarefa, na sala de aula, desloco-me entre os diferentes grupos procurando inteirar-me do seu trabalho. Quando necessário, tento apoiar os grupos, mas adopto uma postura questionadora, sem dar respostas imediatas às questões e dúvidas colocadas e deixo os alunos confrontarem-se com as suas dificuldades até que eles próprios as ultrapassem. No entanto, os alunos revelam, desde o princípio, grande autonomia relativamente à professora.

Nas aulas de discussão, há uma grande participação dos alunos que, de forma ordeira, apresentam e explicam as suas ideias e confrontam entre si algumas descobertas. Apesar da notória interacção entre os alunos, nas primeiras tarefas observo uma tendência para apresentar apenas resultados finais e pouco questionamento das ideias dos outros, que são aceites com naturalidade. Esta atitude, também verificada durante as aulas de exploração, altera-se à medida que os alunos ganham hábitos de discussão e experiência neste tipo de tarefas. Nessa altura, é possível ver os alunos a apresentar as suas ideias e os colegas a contrapô-las ou a colocar questões sobre o que não compreendem, a completar as explorações apresentando estratégias diferentes das utilizadas e a pedir justificações. Nestas aulas de discussão, desempenho o papel de reguladora da actividade, tento dar relevo a ideias interessantes que são apresentadas e aproveito as respostas dadas pelos alunos como ponto de partida para abordar vários tópicos programáticos.

A falta de experiência dos alunos na realização de relatórios, em particular nas aulas de Matemática, traz-lhes algumas dificuldades iniciais. Os primeiros relatórios traduzem muito simplificadamente as explorações realizadas e revelam uma valorização dos produtos em relação aos processos, que se traduz numa enumeração das descobertas, acompanhadas de muito poucas explicações e nenhumas justificações. A correcção dos relatórios, através dos meus comentários, incentivando os alunos a descrever os procedimentos utilizados, a exploração de ideias originais, as tentativas de justificação e, até mesmo, uma apreciação da tarefa, revela-se fundamental para a mudança das concepções dos alunos relativamente ao que deve ser incluído num relatório. Também o contacto mais ou menos sistemático com este tipo de trabalho parece tê-los ajudado a progredir em relação a este aspecto, embora o façam em ritmos diferentes.

Finalmente, os resultados evidenciam uma evolução positiva no modo como os alunos exploram as tarefas. Para isso parece ter contribuído o trabalho continuado realizado em torno destas tarefas e a sua influência na evolução das suas aprendizagens.

5.4. Resultados da avaliação dos alunos

As actividades de aprendizagem que têm lugar na disciplina de Análise Numérica durante a experiência de ensino são diversas e visam desenvolver capacidades também diferentes. Para que haja coerência entre o trabalho realizado e a forma de avaliação dos alunos, a sua classificação baseia-se em diferentes instrumentos de avaliação, de forma a contemplar as várias vertentes de trabalho desenvolvido nas aulas. As actividades que os alunos levam a cabo ao longo do semestre são, essencialmente, de dois tipos: a realização de tarefas de exploração/investigação e aulas de exposição de matéria e de resolução de exercícios e problemas.

A realização de tarefas de investigação é uma actividade matemática complexa que pretende desenvolver no aluno aspectos relacionados com as atitudes, capacidades e conhecimentos. As quatro tarefas de investigação são avaliadas com base na análise dos relatórios elaborados pelos alunos. A avaliação do relatório inclui uma apreciação geral, um comentário detalhado dos aspectos onde mostram ter mais dificuldades, sugestões que podem ajudar os alunos a melhorá-lo e, ainda, uma classificação quantitativa (na escala de 0-20), igual para todos os elementos do grupo, que resume a apreciação feita. Na classificação destes documentos utilizo a tabela de descritores que se encontra no Anexo 8.

A qualidade da maior parte dos relatórios da primeira tarefa não corresponde ao trabalho desenvolvido pelos seus elementos e que é observado por mim, na aula e registado nas notas de campo. Como forma de motivação e para que não se verificasse o abandono ou desinteresse dos alunos por este tipo de actividade, só atribuo classificações superiores a 10 valores neste primeiro relatório e proponho aos alunos que a média final dos relatórios seja feita utilizando apenas as três melhores classificações obtidas nos quatro relatórios produzidos. Ao longo do semestre observo uma grande preocupação dos alunos em analisar os comentários feitos por mim, na correcção dos relatórios, de forma a melhorar os seguintes. Este facto traduz-se numa melhoria significativa da qualidade dos relatórios produzidos e numa evolução das respectivas classificações. De facto, a média das classificações do relatório da primeira tarefa é 11,6 valores e na última tarefa de 14,5 valores. No final do semestre, para cada aluno, é depois calculada a média das classificações obtidas nos três melhores relatórios das tarefas realizadas (como esperado, para quase todos os alunos o relatório eliminado é o da primeira tarefa), que tem um peso de 40% na respectiva classificação final. Estas classificações finais dos alunos nos relatórios apresentam uma média de 14 valores.

Há a referir, ainda, que os relatórios constituem não só um elemento fundamental da avaliação dos alunos na disciplina mas informam, também, sobre o modo como estão a evoluir em relação aos objectivos delineados, permitindo fazer ajustes no processo de ensino-aprendizagem quando tal se verifique ser necessário.

A participação e o empenho dos alunos na realização das várias tarefas propostas (na aula e fora delas), a compreensão do processo de investigação e a capacidade de comunicação oral são também objectivos avaliados por mim, através da observação que faço durante as aulas de realização de tarefas, de resolução de problemas e exercícios e nas discussões em grupo. Esta componente individual da avaliação tem uma classificação qualitativa (Insuficiente, Suficiente com dificuldades, Suficiente e Bom), traduzida depois por uma classificação quantitativa (8, 10, 13 e 16 valores) que pondera a classificação final do aluno em 10%. Como todos os alunos se mostram empenhados e participativos (em maior ou menor grau) e evidenciam uma evolução (ainda que pequena, nalguns casos) ao nível dos processos investigativos e da comunicação, a classificação mínima atribuída é de 10 valores. A média das classificações dos alunos nesta componente da avaliação é de 14 valores, distribuídos da seguinte forma: 2 alunos com 10 valores, 23 alunos com 13 valores e 10 alunos com 16 valores.

Durante o semestre são aplicados dois testes escritos de avaliação, individuais, cujo principal objectivo é analisar o desempenho global de cada aluno no domínio do conhecimento, relacionado com os tópicos abordados nas aulas expositivas e de resolução de exercícios. O primeiro teste é realizado a meio do semestre (8.ª semana), depois de exploradas as duas primeiras tarefas e de ser abordado o tópico da interpolação polinomial. Deste modo, é possível obter informações não só sobre a evolução das aprendizagens dos alunos mas também verificar em que medida os objectivos da disciplina, em particular os da experiência de ensino, estão a ser atingidos e detectar as lacunas que precisam de ser ultrapassadas. O segundo teste é realizado na última semana do semestre, com os mesmos objectivos gerais.

Ambos os testes são realizados em duas horas e são estruturados em duas partes. A primeira parte, orientada para a avaliação de aquisição de conhecimentos, incide sobre questões de natureza puramente matemática abrangendo a matéria leccionada. Pretendo com estas questões avaliar o uso de conceitos e procedimentos e as competências de cálculo na resolução dos exercícios colocados, semelhantes aos realizados nas aulas práticas. A segunda parte contempla a exploração de situações problemáticas, para as quais os alunos não têm resposta imediata mas que estão relacionadas com os tópicos abordados e podem ser desenvolvidas através de diferentes estratégias e raciocínios. Pretendo com esta questão observar e recolher informação sobre a compreensão do processo de investigação e de resolução de problemas e do modo como os alunos mobilizam os conhecimentos matemáticos. Nestes testes os alunos também têm a possibilidade de utilizar a máquina de calcular como meio auxiliar e facilitador da sua realização.

A classificação dos testes é quantitativa (escala de 0-20) e a sua média contribui em 50% para a classificação final atribuída aos alunos nesta disciplina. No primeiro teste, as classificações obtidas pelos alunos não são muito elevadas, apresentando uma média de 10 e uma grande amplitude nos seus valores ([6, 18]). No segundo teste a média das classificações dos alunos sobe para 13 mas continua a apresentar a mesma amplitude de valores. Pelo facto dos alunos e dos processos de ensino-aprendizagem não serem os mesmos, não é possível comparar estes resultados com outros que são obtidos em anos anteriores, com metodologias essencialmente transmissivas. No entanto, as classificações que os alunos obtêm nos testes deste ano, cuja estrutura é, em parte, comparável, não são piores. Contrariamente ao habitual, em que a percentagem de alunos reprovados se aproximava dos 25%, apenas três alunos não atingem uma classificação de dez valores na média dos testes. Assim, não deixa de ser evidente, que as actividades desenvolvidas nas aulas, durante esta experiência de ensino, constituem uma alternativa válida, também, para o desenvolvimento de aptidões no domínio do conhecimento.

As classificações finais dos alunos, na disciplina de Análise Numérica, podem considerar-se bastante positivas, uma vez que apenas 6 alunos não obtiveram classificação final superior a 12,0 valores, como exigido pela Escola Naval para dispensar de exame. Quando sujeitos a exame, com uma estrutura idêntica à dos testes, os alunos referidos obtêm aprovação. Estes resultados são semelhantes aos obtidos numa experiência de ensino anterior, realizada por mim na mesma disciplina e integrando, igualmente, a realização de tarefas de investigação. Deste modo, parece-me razoável afirmar que os objectivos da experiência de ensino realizada são atingidos.

5.5. Reacções/opiniões dos alunos sobre a experiência de ensino

As opiniões dos alunos sobre a experiência realizada nas aulas de Análise Numérica e a análise do efeito das tarefass de investigação nas suas concepções e atitudes face à Matemática são obtidas a partir dos questionários (inicial e final), aplicados a todos os alunos participantes.

Como já referido no capítulo da metodologia, para a análise das respostas às questões fechadas, utilizo procedimentos básicos descritivos. Para as questões comuns aos dois questionários, apresento os resultados (iniciais e finais) em simultâneo, organizados em tabelas de frequência e representados em gráficos de barras, de forma a facilitar a sua leitura e interpretação. As questões abertas são tratadas através de análise de conteúdo.

Concepções e atitudes dos alunos face à Matemática

É usual, os alunos pensarem que a Matemática que se aprende na escola tem pouco a ver com o mundo real, sobretudo no ensino superior em que é considerada uma disciplina muito abstracta. É de esperar que os alunos, após a realização das tarefas de investigação, reconheçam a aplicação e a utilidade prática dos conteúdos da disciplina de Análise Numérica. Assim, sobre a questão "A Matemática na universidade é muito abstracta", a opinião dos alunos, no questionário inicial, está dividida entre os que discordam (32%) e os que concordam (29%) com esta afirmação, sendo que a maioria (38%) não concorda nem discorda. No questionário final, o número de respostas concordantes (24%) diminui e a maioria dos alunos passa a discordar (42%), embora se mantenha elevada a percentagem de alunos sem opinião formada (35%). Na figura seguinte sintetizam-se as respostas dadas pelos alunos a esta questão:

Nível	Quest. inicial		Quest. final	
	alunos	%	alunos	%
1	2	5,9	4	11,8
2	9	26,5	10	29,4
3	13	38,2	12	35,3
4	10	29,4	8	23,5
5	0	0	0	0

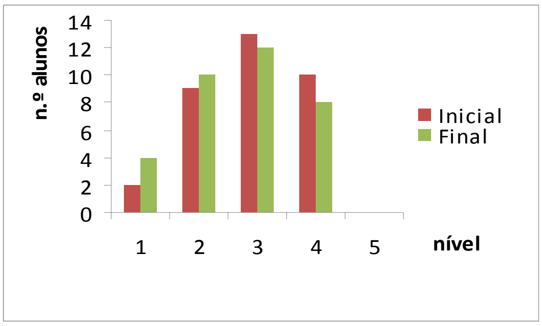


Figura 5.4 – Opinião dos alunos sobre a abstracção da Matemática

De acordo com os resultados, no final da experiência os alunos alteram a sua perspectiva mas de uma forma pouco significativa. A análise destes resultados sugere que é possível que os alunos estejam a exprimir a sua opinião relativamente às disciplinas de Matemática, tal como a conhecem nos moldes tradicionais (como as Análises ou a Álgebra), uma vez que a questão não está focada na Análise Numérica. Além disso, é possível que um só semestre de contacto com este tipo de tarefas e apenas numa disciplina não seja suficiente para alterar a opinião dos alunos sobre esta característica da Matemática. No entanto, as respostas às questões abertas do questionário final mostram que alguns alunos reconhecem o contributo das tarefas para a alteração das suas concepções sobre a abstracção da Matemática:

> Acho que [o contributo das tarefas] é positivo, ajuda a pôr um contexto em toda a matéria que, por vezes, é muito abstracta.
>
> [As tarefas] são verdadeiramente uma mais-valia visto que (…) faz com que os alunos tenham outro conceito da Matemática, não apenas o conceito teórico que os mesmos associam à disciplina.

> [A realização das tarefas] ajuda a combater o "ódio" que os alunos têm "à priori" sobre Matemática.

Solicitados a manifestarem a sua opinião sobre a afirmação "A Matemática é uma colecção de factos e procedimentos que têm que ser memorizados", o nível de discordância inicial é grande (53%) e é reforçado após as tarefas de investigação (61%). Embora este aumento não seja significativo, penso que a diminuição da percentagem do número de alunos concordantes de 38%, inicialmente, para 21% no final do semestre é um factor positivo. Resumem-se, em seguida, as respostas dos alunos a esta questão:

Nível	Quest. inicial		Quest. final	
	alunos	%	alunos	%
1	3	8,9	3	9,1
2	15	44,1	17	51,5
3	3	8,8	6	18,2
4	13	38,2	7	21,2
5	0	0	0	0

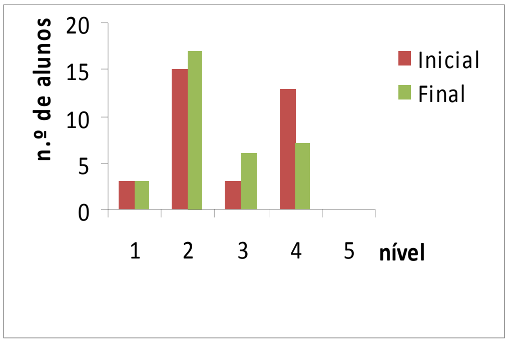


Figura 5.5 – Opinião dos alunos sobre a memorização de procedimentos na Matemática

Estes resultados estão de acordo com a opinião positiva manifestada pelos alunos, relativamente às tarefas de investigação, no sentido de ser desvalorizada a memorização e valorizada a necessidade de compreender a Matemática:

> [A realização das tarefas] proporciona um contacto com a Matemática diferente daquela que nos é dada e que somos incentivados a aplicá-la sem compreendê-la.

> Penso que [a exploração das tarefas] é um método bastante construtivo pois obriga-nos a investigar e descobrir por nós próprios o funcionamento das fórmulas que iremos aplicar em vez de apenas nos limitarmos a decorá-las.

De uma forma geral, os alunos não limitam a Matemática a um conjunto de conteúdos e procedimentos mas incluem, na sua definição, referências a outros aspectos, como o raciocínio ou a resolução de problemas. As respostas à questão "A Matemática é, sobretudo, resolução de problemas", confirmam que a maioria dos alunos identifica a Matemática com a resolução de problemas (71% de opiniões concordantes).O tipo de trabalho desenvolvido durante o semestre lectivo parece reforçar as opiniões iniciais dos alunos, uma vez que no questionário final as opiniões concordantes aumentam (sobretudo as totalmente concordantes) para 74%, como se pode observar na figura seguinte:

Nível	Quest. inicial		Quest. final	
	alunos	%	alunos	%
1	0	0	0	0
2	5	14,7	4	11,8
3	5	14,7	5	14,7
4	19	55,9	16	47,1
5	5	14,7	9	26,5

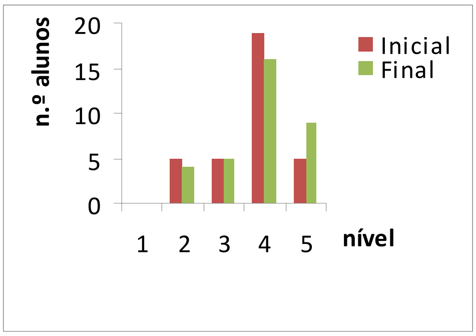


Figura 5.6 – Opinião dos alunos sobre a resolução de problemas

Nas suas respostas ao questionário final, os alunos reconhecem a importância da realização das tarefas de investigação para o desenvolvimento da sua capacidade de resolução de problemas. Este é um dos aspectos mais referidos pelos alunos:

> [As tarefas] permitem novas formas de abordagem a problemas.
>
> [A realização das tarefas permite] descobrir novos métodos de resolver problemas.
>
> [A nova metodologia] ensina-nos como proceder quando temos um problema para resolver sem ter nenhum método para aplicar.
>
> [A exploração das tarefas] desenvolve a nossa capacidade lógica e ajuda-nos a resolver melhor os problemas do dia-a-dia.

De certa forma também relacionadas com a resolução de problemas, surgem as questões seguintes dirigidas, sobretudo, às atitudes dos alunos face ao trabalho em Matemática. A questão "Na Matemática o mais importante é a obtenção de respostas correctas" é aquela em que se verificam maiores alterações no sentido das respostas dadas pelos alunos. No questionário inicial, 29% dos alunos discordam, 21% não concorda nem discorda e 50% concordam. Após a realização das tarefas de investigação, é visível um aumento significativo dos que discordam (53%) e uma diminuição, também significativa, dos que de alguma forma concordam com este ponto de vista (32%). Indicam-se, a seguir, as respostas dos alunos a esta questão:

Nível	Quest. inicial		Quest. final	
	alunos	%	alunos	%
1	2	5,9	4	11,8
2	8	23,5	14	41,2
3	7	20,6	5	14,7
4	14	41,2	8	23,5
5	3	8,8	3	8,8

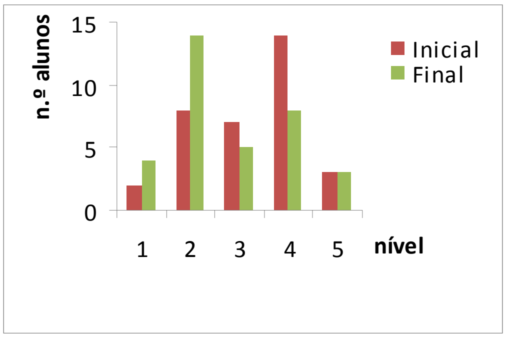


Figura 5.7 – Opiniões dos alunos sobre a unicidade das respostas, em Matemática

Estes resultados confirmam, assim, que o trabalho desenvolvido em torno das tarefas de investigação contribui para que os alunos compreendam o seu carácter mais aberto, a existência de estratégias diversas e a importância dos processos de raciocínio no desenvolvimento do trabalho em Matemática. Nas respostas abertas, a unicidade de respostas e estratégias é comentada, por alguns alunos, como um aspecto positivo:

> [As tarefas são] importantes na medida em que nos fazem pensar de várias formas no assunto.

> Gostei das discussões das tarefas porque conseguimos ver outras maneiras de chegar à mesma solução.

> O facto de haver uma ambiguidade que qualquer opinião seja validada (dependendo da justificação). Este aspecto é muito positivo e faz com que o aluno mostre os seus conhecimentos sem nenhum receio.

As respostas dadas às questões "Quando resolvo problemas, experimento diferentes abordagens quando uma tentativa falha" e "Sou capaz de relacionar novos temas com as experiências pessoais ou conhecimentos anteriormente adquiridos" revelam que os alunos apresentam atitudes positivas em relação ao trabalho em Matemática. No questionário inicial, nenhum aluno discorda destas afirmações e quase todos são parcial ou totalmente concordantes (97% para a primeira questão e 88% para a segunda). No questionário final os alunos não alteram o sentido das suas respostas e mantêm-se maioritariamente concordantes. Nas respostas abertas do questionário final, apenas um aluno refere a realização das tarefas como um factor que potencia a sua percepção da necessidade de mobilizar conhecimentos adquiridos e de relacioná-los: "[Agradou-me a exploração das tarefas] fazendo com que relacionássemos todos os conhecimentos matemáticos que possuíamos de formas que nunca tínhamos experimentado".

Opinião dos alunos sobre a experiência de ensino e as tarefas de investigação

As opiniões dos alunos sobre a experiência realizada nas aulas de Análise Numérica, relativamente às tarefas propostas e ao modo como se desenvolveu o seu processo de aprendizagem, são recolhidas através do questionário final. Os resultados obtidos na questão "Agrada-me a metodologia de ensino utilizada nesta disciplina" revelam que esta foi do agrado da maioria dos alunos (68%). No entanto, o facto de haver 9 alunos (26%) sem opinião formada e 2 (6%) que são discordantes leva-me a tentar compreender quais os aspectos que podem ter contribuído para estas respostas.

Começo por analisar as questões relativas ao meu desempenho, enquanto professora, em vários aspectos relacionados com a realização das tarefas de investigação. Quando solicitados a dar opinião sobre "As indicações dadas pela professora foram suficientes para a realização das tarefas", apenas 1 aluno (3%) discorda (parcialmente), 2 (6%) não concordam nem discordam e 31 (91%) concordam parcial ou totalmente. Parece, pois, que as indicações dadas por mim, quer oralmente na aula ou através do guião disponibilizado para auxiliar a escrita dos relatórios, são suficientes, não havendo qualquer registo totalmente discordante. O aluno que se exprime de forma parcialmente discordante, parece não ter compreendido o foco desta questão pois a sua resposta está relacionada com as dificuldades inerentes à própria tarefa e à inexperiência dos alunos neste tipo de actividade, como sugere o seu comentário registado nas questões abertas: "A matéria necessária para a tarefa deveria ser dada antes da mesma".

As questões "As indicações dadas pela professora foram suficientes para a realização do relatório de grupo" e "Os comentários que a professora fez no relatório ajudaram-me a perceber os pontos fortes e fracos do meu trabalho" estão, de certa forma, focadas na elaboração dos relatórios e apresentam resultados semelhantes no sentido de resposta dos alunos. Tendo em conta o número de opiniões concordantes (94%) e o facto de não haver qualquer opinião discordante, parece ser consensual a utilidade dos comentários da professora na melhoria dos mesmos. À semelhança do já descrito para a realização das tarefas (considerando a totalidade das suas fases), a maioria dos alunos (83%) também considera adequadas as indicações dadas pela professora para a escrita dos relatórios, havendo a registar apenas uma resposta parcialmente discordante mas que não apresenta qualquer argumento que possa justificar e clarificar esta opinião.

A distribuição dos tempos lectivos pelas diferentes actividades realizadas na sala de aula é, para mim, um aspecto difícil e de grande ponderação. Neste sentido, pretendo saber se os alunos concordam com o planeamento feito. As opiniões em relação à questão "Houve uma adequada ponderação entre as aulas expositivas, de exercícios e de realização de tarefas" são dominantemente concordantes (82%) mas há 6 alunos (18%) que discordam. De facto, a distribuição dos tempos lectivos é alvo de desagrado/crítica nalguns comentários das questões abertas e a necessidade de mais exercícios é reclamada por vários alunos. Estas são algumas das suas afirmações:

> Menos tarefas e mais aulas práticas para resolução de exercícios.
>
> Falta de um pouco mais de prática dos conteúdos leccionados.
>
> Apenas que a professora devia fazer mais exercícios nas aulas para nós termos mais exemplos para poder estudar.

Esta atitude dos alunos é natural se tivermos em conta que o hábito escolar da realização de exercícios na sala de aula está muito enraizado e que o trabalho independente (como o processo de Bolonha preconiza) e com tarefas deste tipo ainda está pouco desenvolvido. Apesar disso, há muitos alunos que defendem o reforço das aulas dedicadas à exploração das tarefas e que reclamam, inclusivamente, a sua realização noutras disciplinas, como expresso no comentário seguinte: "Deveriam ser mais exploradas, e não só nesta disciplina".

Interessa-me também conhecer a opinião dos alunos sobre as tarefas de investigação propostas. Os resultados relativos à questão "O tempo disponibilizado para a realização das tarefas foi suficiente" mostram que, a maioria dos alunos tem opinião concordante. Assim, 8 alunos (23%) discordam parcialmente, 3 (9%) não concordam nem discordam e 23 (68%) concordam parcial ou totalmente. Apesar disso, este aspecto é referido também nas questões abertas e as opiniões expressas sugerem um alargamento do tempo disponível para a realização da tarefa, embora essa necessidade se faça sentir mais na fase de elaboração dos relatórios:

> [Sugeria] aumentar o tempo para a realização das mesmas.
>
> [Gostei menos do] facto de termos pouco tempo para uma realização conveniente ou mais aprofundada.

No que respeita à questão "Os assuntos tratados nas tarefas são motivadores", apenas 3 alunos (9%) discordam parcialmente, 9 alunos (26%) não concordam nem discordam e os restantes 32 alunos (65%) concordam parcial ou totalmente. No entanto, os comentários dos alunos nas respostas abertas do questionário final esclarecem que a motivação induzida pelas tarefas não advém necessariamente dos assuntos abordados mas está relacionada, também, com o seu carácter mais aberto e desafiante e o tipo de trabalho desenvolvido:

> Motivou que a maioria dos problemas estivessem relacionados com a vida, especialmente a vida militar.
>
> Gostei dos desafios colocados em cada tarefa, motivavam.
>
> Permitem aos alunos envolverem-se mais no estudo e empenho na procura de uma resolução.
>
> As tarefas de investigação criam um espírito motivador nos alunos, na medida em que este se sente livre para exprimir a sua opinião e dar o seu parecer sobre a matéria com base no que investiga.
>
> Acho motivador e ajuda-nos a descobrir novos métodos de resolver problemas.

Para os alunos, parece ser consensual o facto das tarefas de investigação terem um papel importante na sua aprendizagem. À questão "A realização das tarefas ajudou-me a compreender melhor os conteúdos programáticos da disciplina", 28 alunos (82%) respondem que concordam parcial ou totalmente, 4 (12%) não concordam nem discordam e apenas 2 alunos (6%) discordam parcialmente. Considerando os resultados anteriores, é de esperar opiniões positivas sobre a eficácia do trabalho desenvolvido na aprendizagem dos alunos. A análise das respostas à questão "O trabalho desenvolvido com a nova metodologia foi eficaz em termos da minha aprendizagem" revela um sentido de resposta semelhante à anterior com 28 (82%) alunos concordantes, 2 (6%) sem opinião e 4 (12%) discordantes. As justificações que os alunos apresentam nos seus comentários para a opinião favorável que demonstram em relação às tarefas de investigação enquanto facilitadoras da aprendizagem são várias:

> A metodologia de ensino utilizada nesta disciplina agradou-me pois o trabalho desenvolvido com esta nova metodologia foi eficaz em termos da minha aprendizagem.
>
> [As tarefas] foram uma mais valia para a minha aprendizagem, pois ajuda-me a melhorar a pesquisa, a relacionar matérias diferentes.
>
> Acho que [as tarefas] são produtivas e ajudam na compreensão das matérias que vamos abordar.
>
> Concordo com o seu uso porque ajuda-me a perceber a matéria que vem a seguir.
>
> Boa metodologia para aprender Matemática, pois antes de saber como se resolve alguns problemas tentamos resolver de forma semelhante à que nos é ensinado posteriormente.
>
> [A exploração das tarefas] ajuda a compreender a matéria.
>
> Penso que é bastante útil para a nossa aprendizagem e para nos sentirmos mais à vontade com a resolução de problemas.
>
> [As tarefas são] úteis. Mete-nos a pensar sobre um determinado assunto e, além disso, aprendemos a matéria de uma certa forma e consolidamo-la mais facilmente.

Uma análise cruzada e mais focada nas opiniões discordantes revela que estes alunos respondem a estas duas questões em sentidos contrários. Isto é, os dois alunos que consideram que a realização das tarefas não contribui para a compreensão dos tópicos programáticos de Análise Numérica estão satisfeitos com o trabalho desenvolvido na disciplina e reconhecem a sua eficácia em termos de aprendizagem. Estes resultados confirmam, de certa forma, os já apresentados anteriormente em relação aos alunos considerarem que a sua aprendizagem não se limita à aquisição de conhecimentos (conteúdos e procedimentos). Por exemplo, o desenvolvimento do raciocínio e do espírito crítico e investigativo são alguns dos aspectos que os alunos referem como importantes na aprendizagem:

> Acho que [as tarefas] são muito importantes uma vez que obriga o aluno a pensar por ele próprio e a melhorar a forma como o faz.

> Acho [esta metodologia] interessante pois desenvolve o raciocínio.

> Acho que [as tarefas] têm muita importância porque desenvolvem o nosso espírito crítico.

> [As tarefas] são importantes na medida em que permitem desenvolver o espírito investigativo dos alunos.

A participação activa do aluno na sua aprendizagem também é alvo de comentários favoráveis por parte dos alunos, confirmando o seu agrado pela metodologia utilizada:

> Penso que [as tarefas] são úteis na medida em que permitem que os alunos participem activamente na descoberta de novos conteúdos, ao invés desses conteúdos lhes serem "descarregados" sem que o aluno perceba bem o porquê de existir aquela matéria.

> Assim tive a oportunidade de ser eu, em conjunto com os meus camaradas, de estabelecermos nós os métodos que achávamos mais eficazes, obrigando-nos assim a pensar mais, em vez de ser só a receber informação e a pô-la em prática nos testes.

Por outro lado, há alunos que consideram que as tarefas facilitam a compreensão da "matéria" mas apresentam argumentos que, de alguma forma parecem criticar o trabalho desenvolvido durante o semestre lectivo:

> No caso da Análise Numérica penso que as tarefas foram positivas ou seriam positivas mas enquadradas de uma forma diferente: antes de cada tarefa enquadrar o tema para seguidamente ser mais prático e fácil de aplicar conceitos.

> As tarefas são proveitosas até certo ponto. No meu parecer podem ser só elaboradas após termos dado a matéria necessária, o que não se verificou na cadeira.

> Concordo com a realização das tarefas de investigação, faz com que se perceba a matéria mas discordo do peso das tarefas na nota final, pois essa deveria corresponder aos meus conhecimentos e o trabalho tem pouco a ver com conhecimentos.

Mais uma vez, parecem ser as mudanças induzidas pelas tarefas de investigação nos hábitos de trabalho/estudo adquiridos ao longo da sua escolaridade, às quais têm alguma dificuldade de adaptação, que estão na base da resistência e do desagrado de alguns alunos. Por isso, é de esperar que o trabalho continuado em torno da realização de tarefas de investigação possa ajudar a ultrapassar algumas das dificuldades referidas. De facto, as melhorias (já descritas anteriormente) no trabalho desenvolvido pelos alunos são evidentes, de tarefa para tarefa. Os próprios alunos reconhecem que "A realização de cada tarefa ajudava-me nas tarefas seguintes", uma vez que 76% das suas respostas são concordantes em relação a esta afirmação e apenas um aluno discorda, apesar de ser parcialmente. Não existem registos, nas respostas abertas ao questionário final, que façam referência explícita à evolução do trabalho desenvolvido ao longo da realização das várias tarefas. No entanto, cruzando estes resultados com os obtidos da análise de outros aspectos relativos às tarefas, podemos considerar que há vários factores a contribuir para esta tendência, entre os quais estão os comentários feitos por mim aos relatórios escritos, as discussões em grande grupo e os conhecimentos (não só a nível de conteúdos e procedimentos da disciplina mas também de processos matemáticos e estratégias de resolução de problemas) que vão adquirindo nas aulas e que depois são capazes de relacionar e aplicar a novas situações.

A avaliação dos alunos é um dos aspectos a ter em conta quando se preconiza uma mudança no processo de ensino-aprendizagem pois é, habitualmente, alvo de muitas críticas. Por isso, considero importante perceber se os alunos sentem que a avaliação das tarefas contribui adequadamente para a sua classificação final do semestre/disciplina. À questão "A forma de avaliação das tarefas de investigação foi adequada", apenas 2 alunos (6%) discordam da adequação, 10 (29%) não concordam nem discordam e 22 (65%) concordam com a avaliação feita. No entanto, quando questionados sobre "Os relatórios realizados em grupo permitem à professora avaliar o meu trabalho nas tarefas", as opiniões já se dividem mais entre os 17 alunos concordantes (50%), os 5 que não têm opinião (15%) e os 12 discordantes (35%). A análise destes resultados revela que os alunos concordam, de modo geral, com a avaliação das tarefas, nos moldes em que é feita. No entanto, as dificuldades sentidas por grande parte dos alunos na escrita dos relatórios e o facto de serem realizadas em grupo parecem ser argumentos fortes para discordarem do facto da avaliação do seu trabalho ser feita com base nestes documentos, como assinalado nos comentários seguintes:

> Poderia haver tarefas de investigação individuais, pois a avaliação dos alunos é mais justa.

> [Temos] pouco ou nenhum hábito a fazer este tipo de relatórios, por vezes não compreendíamos bem o que nos era pedido e quais os objectivos.
>
> Não gostei apenas do resultado do primeiro trabalho, mas como não contou para achar a média dos trabalhos, é menos mau.
>
> Só [não gostei] o facto de a professora ser tão minuciosa na correcção dos relatórios.
>
> Apesar disso, há um aluno que expressa uma opinião muito favorável em relação aos relatórios serem uma componente importante da avaliação dos alunos: "Acho importante existir mais um método de avaliação (relatório) para além dos testes, pois há pessoas que não têm máximo rendimento nos testes e podem contrabalançar com os relatórios".

Contrariamente ao que se verifica nos relatórios, os alunos consideram que têm mais facilidade em expressar-se nas discussões orais em grande grupo. As respostas à questão "Na apresentação oral consigo explicar melhor o que fiz", os resultados mostram que 25 alunos (73%) concordam com a afirmação, 4 (12%) não têm opinião formada e 5 alunos (15%) discordam. As discussões suscitadas pela realização de tarefas investigativas, quer entre os elementos dos grupos, quer com toda a turma, parecem ser do agrado dos alunos. No início do semestre, 85% dos alunos concordam com a afirmação "Agrada-me participar em debates ou discussões abertas", valor que se mantém após a realização das tarefas de investigação (embora seja reforçada a concordância total). As referências positivas em relação às apresentações orais e aos debates também são muito significativas nos comentários dos alunos, salientando, sobretudo a sua importância na aprendizagem:

> [O que mais gostei foram] as discussões em grupo.
>
> [O que mais me agradou foi] o trabalho de grupo e a troca/debate de ideias necessárias para chegar a processos de resolução dos problemas propostos.
>
> O facto de podermos trabalhar em grupo e poder partilhar e discutir as nossas ideias foi bastante enriquecedor.
>
> O que me agradou mais foi podermos exprimir as nossas ideias em grupo.

> Agradou-me o trabalho em grupo, trocar e defender maneiras de abordagem diferentes é bastante útil para ter uma mente mais aberta.
>
> Gostei das discussões das tarefas porque conseguimos ver outras maneiras de chegar à mesma solução.
>
> O facto de discutir várias tentativas, ficava a perceber o porquê de não se poder resolver de certa maneira e os processos para chegar a uma solução.
>
> A discussão de ideias fomenta o trabalho de grupo, o que é muito importante [é uma mais valia para a profissão] devido à instituição onde nos encontramos.

A menção que é sempre feita nestes comentários à partilha de informação entre os colegas, ao trabalho em equipa e à aprendizagem em pares é expectável, uma vez que a participação em debates é, por si só, um trabalho em grupo. Deste modo, é natural que estes aspectos sejam também apontados pelos alunos como positivos e do seu agrado.

Síntese de resultados

As respostas fornecidas aos questionários aplicados no início e no final da experiência de ensino permitem caracterizar a visão dos alunos e as suas atitudes face à Matemática e recolher as suas opiniões sobre os aspectos que consideram mais e menos conseguidos nas aulas de Análise Numérica. De acordo com os resultados, as diferenças identificadas nas respostas obtidas antes e depois da realização da experiência de ensino nem sempre são significativas. No entanto, podemos dizer que, de um modo geral, os alunos apresentam atitudes positivas em relação à Matemática. Desvalorizam a memorização de factos e procedimentos em favor da compreensão e salientam o desenvolvimento do raciocínio e a resolução de problemas como aspectos fundamentais do trabalho em Matemática. Além disso, é interessante observar que a evolução mais significativa tem a ver com a atitude de desvalorização da obtenção de respostas únicas e correctas. Este resultado pode, pelo menos em parte, ser considerado uma consequência do tipo de experiência que os alunos vivem nesta disciplina ao longo do semestre.

Os resultados descritos evidenciam, igualmente, uma satisfação generalizada em relação à metodologia de ensino-aprendizagem utilizada. A maioria dos alunos evidencia uma clara preferência por uma aprendizagem em que participam activamente, em oposição ao papel de receptores de conhecimentos e destacam as tarefas de investigação como um dos aspectos positivos da experiência de ensino. Os argumentos preponderantes que justificam estas opiniões referem que as tarefas propostas são realistas, na medida em que possibilitam a aplicação de conhecimentos em situações concretas do quotidiano e permitem um alargamento e aprofundamento de conhecimentos contribuindo para uma maior compreensão e capacidade de enfrentar problemas, constituindo um meio facilitador da aprendizagem. Por outro lado, as tarefas representam uma mudança em relação ao tipo de trabalho que consideram habitual nas aulas de Matemática, tendo os alunos expressado particular agrado pelas discussões e pelo trabalho em grupo realizado. No entanto, talvez o mais significativo seja o modo como os alunos sentiram que as tarefas os levam a pensar de outra maneira, a raciocinar e a descobrir uma outra dimensão da Matemática.

As respostas mais negativas não criticam a metodologia utilizada mas exprimem preferência pelas aulas onde a resolução de exercícios é prática corrente, considerando que estas últimas poderão ter melhores efeitos na aprendizagem. Outra corrente que surge nas opiniões negativas registadas, prende-se com o facto da avaliação dos relatórios contribuir para a classificação final dos alunos, dadas as dificuldades que eles apresentam na sua elaboração, sobretudo ao nível da escrita e da escassez de tempo. Estes são, aliás, os únicos aspectos referidos pelos alunos, nas suas respostas, que gostariam de ver alterados. Estes resultados podem estar relacionados com as mudanças induzidas pelas tarefas de investigação nos hábitos de trabalho, normalmente associados ao ensino centrado no professor e às metodologias transmissivas, às quais os alunos têm dificuldades de adaptação e um primeiro contacto com este tipo de tarefas, além do mais limitado no tempo pode não ser suficiente para os alterar.

Pode assim afirmar-se que, no geral, as tarefas de investigação parecem ter alterado as atitudes dos alunos em relação à Matemática e contribuído significativamente para a sua aprendizagem dos tópicos de Análise Numérica.

5.6. Conclusões e reflexões finais

Com a experiência de ensino realizada pretendo criar um ambiente de aprendizagem que promova o contacto dos alunos com as actividades de investigação e ao mesmo tempo permita trabalhar os conceitos e procedimentos de Análise Numérica nelas envolvidos. Deste modo, a construção de conceitos, a aquisição de conhecimentos de diversos tipos e a proficiência em utilizar diversos procedimentos básicos da disciplina podem decorrer da experiência matemática dos alunos.

Ao longo da experiência de ensino são propostas quatro tarefas de investigação que os alunos exploram com bastante autonomia e entusiasmo. Estas tarefas são enquadradas na vivência diária dos alunos, facto que parece ser importante na sua motivação para este tipo de actividade. Surgem algumas dificuldades no trabalho investigativo em torno das primeiras tarefas, sobretudo devido à falta de experiência dos alunos. No entanto, o nível de profundidade com que exploram as tarefas evolui ao longo do semestre e nas últimas tarefas os alunos evidenciam ter desenvolvido uma boa compreensão dos processos matemáticos associados ao processo de investigação, a sua capacidade para comunicar matematicamente e o seu poder de argumentação. Para isso parece terem contribuído os momentos de reflexão proporcionados pelas aulas de discussão e os meus comentários escritos aos relatórios elaborados pelos alunos no final da exploração de cada tarefa, onde também se detectam dificuldades iniciais, sobretudo associadas à expressão escrita das suas descobertas mas que são progressivamente ultrapassadas. As aulas de discussão também se revelam importantes como ponto de partida para abordar os vários tópicos programáticos.

A gestão do tempo é um dos factores que mais parece condicionar o desenvolvimento das actividades. É necessário ter em conta, na realização das tarefas, os diferentes tempos que os vários grupos precisam para chegarem a uma estratégia de resolução conveniente, o tempo necessário à apresentação e discussão dos resultados dos diferentes grupos e ainda conjugar com as restantes actividades lectivas. O número de tarefas realizadas parece ser apropriado bem como os tópicos programáticos abordados por elas e a sua sequência. Desta forma, os alunos utilizam os conhecimentos que vão adquirindo na realização das tarefas seguintes.

A diversificação de tarefas propostas nesta experiência de ensino também parece ter ajudado os alunos a progredir em relação ao processo de resolução de problemas, embora o façam em ritmos diferentes. No final da experiência, os alunos são capazes de seleccionar e utilizar múltiplas estratégias para encontrar uma solução e de procurar as estratégias alternativas mais eficientes. São capazes, igualmente, de fazer escolhas razoáveis acerca das representações matemáticas e de estabelecer relações entre elas.

Ao nível do comportamento dos alunos e das suas reacções ao trabalho desenvolvido ao longo da experiência de ensino, não observo diferenças significativas entre as duas turmas. A forma como os alunos reagem e exploram as tarefas surpreende pela positiva. De um modo geral, os alunos investem e empenham-se na realização das tarefas e conseguem superar as minhas expectativas, trabalhando de forma intuitiva com conceitos que lhes são desconhecidos. Se atendermos à pouca experiência dos alunos neste tipo de tarefas, parece-me que o trabalho realizado é muito interessante e prometedor e que, para além de contribuir para uma reflexão sobre o processo de investigar, ajuda os alunos na sua aprendizagem.

Os resultados descritos evidenciam, igualmente, uma satisfação generalizada por parte dos alunos em relação à metodologia de ensino e aprendizagem utilizada. A maioria mostra uma clara preferência por uma aprendizagem em que participa activamente e reconhece as potencialidades das tarefas realizadas na promoção da sua aprendizagem.

Pode afirmar-se que a experiência de ensino, em geral e as tarefas de investigação, em particular, influenciam as atitudes dos alunos em relação à Matemática e contribuem significativamente para a aprendizagem dos tópicos de Análise Numérica.

Capítulo 6

O Caso Carlos

A análise seguinte foca-se no trabalho desenvolvido por Carlos na realização das diferentes tarefas de investigação propostas no decorrer da disciplina de Análise Numérica. Começo por fazer uma breve caracterização do aluno para depois apresentar uma descrição detalhada dos resultados referentes ao seu raciocínio no trabalho com representações, na realização das tarefas de investigação e na resolução de problemas e também uma referência às aprendizagens desenvolvidas. De seguida, tendo em conta as questões do estudo, faço uma síntese desses resultados.

6.1. Apresentação do aluno

Carlos frequenta o curso de Engenharia de Armas e Electrónica e os resultados escolares que habitualmente apresenta (classificações médias/altas) levam a considerá-lo um estudante acima da média. De um modo geral, tem uma escolaridade bem sucedida, quer a Matemática, quer noutras disciplinas, sem qualquer retenção ao longo do seu percurso escolar até ao ensino superior. Inicia o ano lectivo, já com 22 anos pois no seu 1.º ano do curso reprova à disciplina de Análise Matemática, o que neste estabelecimento de ensino implica a reprovação do ano lectivo e, caso seja autorizada superiormente a permanência do estudante na Escola Naval, a obrigatoriedade de repetir todas as disciplinas desse ano. Este facto não o desmotiva pois Carlos tem uma personalidade muito forte e determinada, também visível durante o trabalho em grupo, no qual é sempre líder.

As suas disciplinas favoritas são Física, Matemática e Desporto. Considera que a Matemática está presente em tudo e a necessidade da sua aprendizagem justifica-se pela importância que tem na sua profissão futura. É um aluno extrovertido, confiante nas suas capacidades de aprendizagem e empenhado nas tarefas que lhe são propostas. Nos seus tempos livres gosta de estar com a família e os amigos.

Na sua opinião, as maiores dificuldades que enfrenta no início do curso são "a falta de hábitos de estudo e falta de tempo nesta instituição" (E5). Tenta estar com atenção nas aulas, tira notas e faz perguntas para esclarecer as suas dúvidas, para poupar algum tempo no estudo e assim conseguir gerir o pouco tempo disponível pelas muitas disciplinas que tem. Estuda regularmente fazendo os "trabalhos para casa". Investe muito na resolução de exercícios que tenta fazer procurando semelhanças em exemplos do livro ou das aulas. Podemos pensar em Carlos como um aprendente procedimental. Procurando a segurança da familiaridade, o aluno desenvolve significado para os conceitos através da rotina do trabalho até se tornar automático.

No questionário inicial, este aluno tem um desempenho acima da média, apesar de apresentar soluções breves e usar procedimentos rotineiros (mas que aparentemente domina pois as suas respostas são maioritariamente correctas). Também consegue, algumas vezes, ser reflexivo e crítico em relação às respostas dadas mas só argumenta sobre afirmações matemáticas quando solicitado. Ao tentar resolver problemas mais abertos e de cunho investigativo não é bem sucedido.

6.2. Raciocínio do aluno

No trabalho com representações matemáticas

Tarefa 1. Nesta tarefa, as respostas de Carlos sobre o modo de formação das regras das operações com intervalos, são essencialmente descritivas, utilizando uma linguagem natural:

> Tinha que se multiplicar as várias combinações e depois escolher os maiores e os menores para fazer de extremos do intervalo final. E aí os casos iam estar todos dentro desse intervalo. A divisão foi da mesma forma que a multiplicação. Pensámos… O que pode acontecer, tendo nós dois intervalos, ao limite superior e inferior? O quociente dá sempre um valor e é o que fizemos. O menor número e o maior número dessas combinações de divisões. (E1)

A trabalhar em grupo, o aluno e os seus colegas utilizam também a notação simbólica, característica da escrita de intervalos, para construir expressões algébricas que formalizam as regras anteriormente descritas:

> Conseguimos concluir a seguinte regra:
>
> $[x_1, x_2] * [y_1, y_2] = [\min C, \max C]$, em que C é o conjunto definido por $C = \{(x_1*y_1), (x_1*y_2), (x_2*y_1), (x_2*y_2)\}$.
>
> Podemos deduzir para a divisão:
>
> $X/Y = [x_1, x_2] / [y_1, y_2] = [\min C, \max C]$, em que C é o conjunto definido por $C = \{(x_1/y_1), (x_1/y_2), (x_2/y_1), (x_2/y_2)\}$. (RT1)

Na questão seguinte, os alunos usam as expressões algébricas das regras já deduzidas para calcular a imagem do intervalo [2, 7] através das funções $f(X) = X + X$ e $f(X) = 2X$ e concluem que são iguais:

> $f(x) = [x_1, x_2] + [x_1, x_2] = [x_1+ x_1, x_2 + x_2]$, ou seja, $[2, 7]+[2, 7] = [4, 14]$ corresponde ao intervalo onde a imagem está definida.
>
> $f(x) = 2[x_1, x_2] = [2x_1, 2x_2] = 2[2, 7] = [4, 14] = [x_1, x_2] + [x_1, x_2]$.
>
> Estas funções, a nível matemático são iguais. (RT1)

Os alunos continuam a utilizar manipulação algébrica para deduzir uma expressão geral para a imagem de um intervalo real através da função $f(X) = X^2$, a partir das regras deduzidas anteriormente:

> $X*X = [x_1, x_2] * [x_1, x_2] = [\min C, \max C]= [x_1*x_1, x_2*x_2] = [x_1^2, x_2^2]$ em que C é o conjunto definido por $C = \{(x_1*x_1), (x_1*x_2), (x_2*x_1), (x_2*x_2)\}$. (RT1)

Neste caso, em que a função não é monótona, a regra não é adequada e a representação gráfica pode ajudar a identificar e resolver conflitos e erros. Durante a entrevista, através de questionamento, tento que Carlos utilize essa representação para recordar e explorar as propriedades das funções e que as aplique ao seu recém-formado conceito de intervalo (E1):

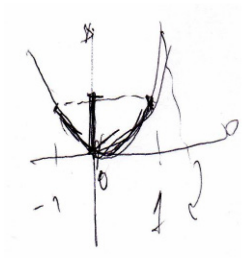
> Prof.ª: E através de gráficos, não chegaram lá?
>
> Carlos: Para mim é difícil imaginar um intervalo ao quadrado numa parábola, não consigo visualizar essa imagem….

A sua relutância para desenhar um gráfico nesta situação parece estar relacionada com a dificuldade na interpretação desse gráfico ou com a sua experiência escolar. Parece que vê o desenho de um gráfico como uma tarefa mais complexa ou como desperdício de tempo: "[aplico a regra] porque é mais fácil. Olhamos para aqui e o que é que vemos? X vezes X. Isto [alternativa gráfica] obriga a pensar…" (E1). Desenha então no papel a função quadrática e experimenta obter a imagem de alguns intervalos de valores reais. Questiono-o novamente,

Prof.ª: Qual seria a imagem do intervalo [-1,1] através desta função?

Carlos: Iria ser de zero a um.

Prof.ª: E considera que são duas abordagens equivalentes?



Ao aplicar a regra ([-1, 1] × [-1, 1] = [-1, 1]), o aluno apercebe-se de uma contradição e responde: "Ou seja, não são iguais. A parábola só está definida de zero para cima, logo não faz sentido termos -1" (E1). Não compreende a razão das diferenças identificadas mas não questiona a regra que aplica nem os cálculos que efectua e opta por continuar a utilizá-la, tal como a deduz. O aluno parece confiar mais nos resultados obtidos através de manipulação algébrica (dedução das regras) e cálculo numérico do que nos valores resultantes da análise do gráfico.

Para deduzir a expressão $f(X) = e^X = [e^{x_1}, e^{x_2}]$, Carlos já usa uma estratégia baseada na representação gráfica da função exponencial e nas suas propriedades, provavelmente porque ao procurar outras estratégias para aplicar, entre os seus recursos, esta é a única disponível: "Só analisámos o gráfico" (E1).

A linguagem natural e as representações algébricas dominam, assim, o trabalho de exploração nesta tarefa. Carlos utiliza-as para descrever os seus raciocínios e para deduzir e explicar as suas respostas. Ainda recorre à notação simbólica quando pretende formalizar os resultados gerais deduzidos. Carlos parece não ver utilidade na representação gráfica, uma vez que só a utiliza quando é solicitado e mostra confiar mais nos seus cálculos e nos resultados obtidos através de manipulação algébrica.

Tarefa 2. A manipulação algébrica que os alunos utilizam, durante o trabalho em grupo, para tentar encontrar a solução da equação não linear, f(x) = ln(x)-e^{-x}, é desadequada e não conduz a uma solução. Só quando os questiono sobre estratégias alternativas é que Carlos considera resolver a equação, de forma aproximada, recorrendo à representação gráfica e à máquina de calcular para o auxiliar. O aluno explica, na entrevista, qual o processo de resolução por que opta: "A partir de conhecimentos pré-adquiridos, deduzimos que para f(x) = 0, então implica que ln(x) = e^{-x}. Podemos criar duas funções que provinham da função inicial e depois calculamos a intersecção das duas (…)" (E2).

Carlos é capaz de utilizar e interpretar, igualmente, outras representações que o conduzem à solução pretendida. Por exemplo, propõe a construção de uma tabela para o auxiliar a encontrar o valor aproximado da solução da equação. Na tabela que constrói utiliza, novamente, a decomposição da função em duas e procura encontrar o ponto de intersecção entre elas, através da análise dos seus valores. Assim, a tabela permite inferir sobre a existência de relações ainda não conhecidas, como explica na descrição, em linguagem natural, que acompanha a tabela:

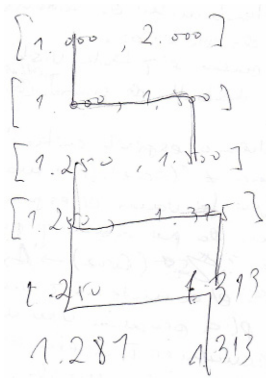
> Podemos criar uma tabela com o objectivo de atribuir valores a x em ln(x) e em e^{-x} para nos aproximar do valor da raiz, concluindo que se encontrava entre x = 1 e x = 3/2 (…) porque é quando o valor da função logarítmica é maior que a exponencial.

x	ln(x)	e^{-x}
0	n.d.	1
1/2	-0,6931	0,6065
1	0	0,3679
3/2	0,4055	0,2231

(E2)

Neste caso, esta forma de representação articula-se, de maneira explícita, com a representação gráfica e o aluno estabelece uma relação entre estas duas representações.

Na exploração da questão seguinte, os alunos a trabalhar em grupo, fazem várias tentativas para encontrar um padrão para o modo de formação dos elementos da sequência apresentada. Durante a entrevista, Carlos reproduz um dos esquemas gráficos que utilizam, a que chama método da cadeira pela semelhança deste objecto com os traços representados:



(E2)

Esta representação é utilizada pelos alunos, no seu trabalho de grupo, para explorar padrões e obter compreensão sobre propriedades importantes dos elementos da sequência. No entanto, depois de identificarem o modo de formação dos elementos da sequência, utilizam, mais uma vez, a linguagem natural para o descrever:

> O elemento do intervalo (máximo ou mínimo) que se encontrava mais distante do valor da raiz é que varia, mantendo-se o outro constante. Seguindo este raciocínio, o intervalo a seguir ao último dado (…) terá metade da amplitude que este (…). O elemento mais distante do valor da raiz (…) será aproximado em 0,016. (RT2)

Para a generalização da lei, complementam a linguagem natural com alguma notação simbólica, numa tentativa de formalização:

> Passando os cálculos realizados nos intervalos anteriores a termos genéricos temos:
>
> Sendo a_i e b_i os extremos duma dada ordem do nosso intervalo, os seguintes serão deduzidos da seguinte forma: b_i-a_i = c_i, em c_i é a amplitude do intervalo. Então c_{i+1} = $c_i/2$ e o extremo mais distante de x (valor da nossa raiz) será acrescido ou decrescido do valor de c_{i+1}, sendo ele o extremo mínimo ou máximo respectivamente. (RT2)

Na última questão desta tarefa, e apesar de terem identificado o problema como sendo a resolução de uma equação não linear, os alunos tentam resolvê-la novamente, sem sucesso, através de manipulação algébrica. No entanto, desta vez já não despendem muito tempo nesta estratégia e utilizam a máquina de calcular para representar a função e encontrar a solução aproximada da equação, à semelhança do que fazem na primeira questão. Este processo de obtenção da solução é, mais uma vez, descrito em linguagem natural, sem que os alunos apresentem qualquer gráfico das funções envolvidas: "Como não nos foi possível resolver analiticamente, tentamos abordar de forma visual. (…)

Calculamos a intersecção das duas funções e o ponto de intersecção obtido foi t = 25,942393" (RT2).

A manipulação algébrica é, assim, a estratégia por que Carlos opta como primeira abordagem, mesmo quando o uso da representação gráfica é a abordagem mais eficiente. Só quando a primeira não permite encontrar soluções ou quando é solicitado a apresentar estratégias alternativas é que recorre a representações gráficas ou tabelares como métodos auxiliares no processo de resolução. Em qualquer das situações, o aluno utiliza sempre a linguagem natural, para explicar os seus raciocínios, que complementa com alguma simbologia quando pretende generalizar regras e procedimentos.

Tarefa 3. Carlos começa a exploração desta tarefa fazendo uma análise do comportamento dos dados, através do cálculo das diferenças entre os seus valores e usa métodos algébricos para encontrar resultados, como explica na entrevista, usando a linguagem natural:

> Calculei as diferenças entre os vários valores que estavam disponíveis na tabela. (…) Verifiquei que havia três valores que cresciam, em 5 diminuía e depois em 8 volta a crescer. (…) Neste caso pensei em (…) obter uma função definida por ramos.

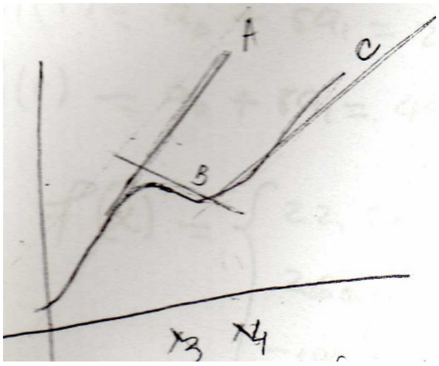
$$\begin{matrix} P_1(4) = 220 \\ P_1(5) = 210 \end{matrix} = \begin{cases} -a_0 + a_1 x = 220 \\ a_0 + a_1 x = 210 \end{cases} = \begin{cases} a_0 + 4a_1 = 220 \\ a_0 + 5a_1 = 210 \end{cases} \quad \begin{matrix} a_1 = -10 \\ a_0 = 260 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} P_1(5) = a_0 + 5a_1 = 210 \\ P_1(8) = a_0 + 8a_1 = 400 \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{190}{3} = 63.3333 \\ a_0 = -106.5 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 22,5x + 7,5x^2 + 10 & [1,4] \\ 260 - 10x & [4,5[\\ -106,5 + 63.33x & [5,8[\end{cases}$$

(E3)

Depois, o aluno opta por uma representação gráfica, embora pouco elaborada e bastante informal, para verificar se os resultados que encontra estão de acordo com os esperados e com os raciocínios desenvolvidos, revelando, mais uma vez, ser capaz de utilizar e relacionar diferentes formas de representação. Explica os seus raciocínios em linguagem natural, com base no gráfico:



> Eu até fiz aqui um rabisco… Foi através da observação da tabela (…). Daqui aqui era crescente, daqui aqui decrescente (…). Logo os polinómios tinham que ser crescentes ou decrescentes e os valores das derivadas tinham que ser positivas ou negativas (…). (E3)

Neste caso, Carlos usa a representação gráfica como apoio para a verificação de cálculos e não para o auxiliar na escolha do melhor método de interpolação ou como método de resolução.

Na questão seguinte desta tarefa, o aluno e os seus colegas de grupo já iniciam o trabalho recorrendo à máquina de calcular para visualizar o comportamento das três funções dadas no enunciado: "Para iniciar a resolução desta tarefa, inserimos na calculadora gráfica as três funções e (…) verificamos que nas três primeiras horas, duas das funções se aproximam dos valores indicados na tabela (…)" (RT3). No entanto, as suas decisões baseiam-se em cálculos, que consideram "mais rigorosos" e que organizam numa tabela, como explica Carlos na entrevista:

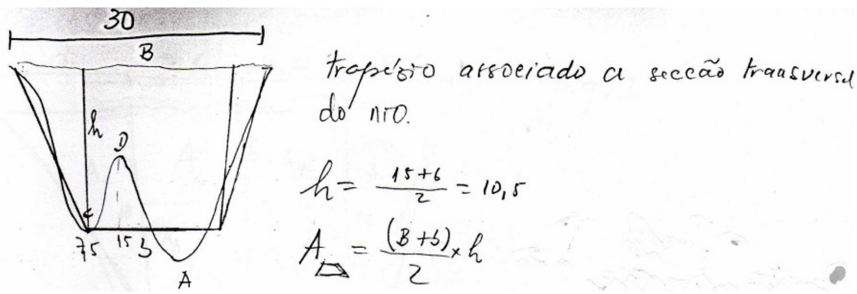
> Fomos calcular as imagens dos dados através dos vários modelos e fomos comparar com a tabela dada no enunciado. Através de uma análise mais rigorosa da tabela destes gráficos, chegamos à conclusão que as imagens da função $y = 82x^2 - 139x + 650$ são as que mais se assemelham à tabela inicial. (E3).

A tabela construída pelos alunos é utilizada, não só para apresentar e organizar dados, mas como base para a realização de inferências sobre a existência de relações não conhecidas e articula-se, explicitamente, com as representações algébricas a partir das quais é construída.

Assim, nesta tarefa, Carlos utiliza diversas representações (algébrica, gráfica, tabelar) e mostra ter facilidade em relacioná-las. A escolha dessas representações parece estar de acordo com a função que o aluno lhes atribui, pois é evidente que tem mais confiança na manipulação algébrica para obter respostas do que nos gráficos, que utiliza apenas para visualizar e confirmar resultados obtidos através de outras formas de representação. O aluno ainda utiliza a linguagem natural para descrever os seus procedimentos e para explicar os seus raciocínios.

Tarefa 4. Nesta tarefa, os alunos começam por escolher figuras geométricas, bastante elementares, como base para o cálculo aproximado da área da figura proposta e apresentam esboços dessas figuras que mostram claramente os dados disponíveis, os pressupostos assumidos e os cálculos realizados. Ao mesmo tempo, os alunos fazem uma descrição detalhada das figuras e de todo o processo de cálculo que conduz ao resultado, em linguagem natural:

> O método mais simples (…), foi considerar a figura como um rectângulo básico e utilizar para largura os 30m (…). Como segunda opção surge o facto de a secção à primeira vista e por nossa aproximação, aparentar ser uma figura geométrica próxima do trapézio (…), temos a largura do rio (30m) como base maior e a base menor será a do ponto c à profundidade do ponto médio de valor de maior profundidade, como segue em anexo sendo a área do trapézio igual à soma das bases multiplicadas pela metade da altura.



(RT4)

Continuam a explorar diferentes estratégias geométricas, cada vez mais complexas, utilizando combinações de várias figuras (rectângulos, triângulos e trapézios):

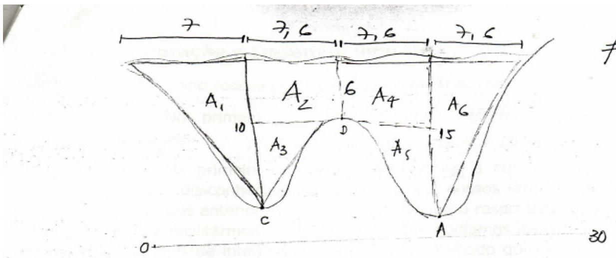


fig. 2

Como o intervalo de O à C mede 7, dividimos os restantes 23 m em três partes iguais.

A área total será:

$$A_t = \sum_{i=1}^{6} A_i$$

$A_1 = \frac{7 \times 10}{2} = 35$

$A_2 = 7{,}6 \times 6 = 45{,}6$

$A_3 = \frac{7{,}6 \times 4}{2} = 15{,}2$

$A_4 = 7{,}6 \times 6 = 45{,}6$

$A_5 = \frac{7{,}6 \times 9}{2} = 39{,}2$

$A_6 = \frac{7{,}6 \times 15}{2} = 57$

Substituindo os valores de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ em A_t temos:

$A_t = 35 + 45{,}6 + 15{,}2 + 45{,}6 + 34{,}2 + 57$.

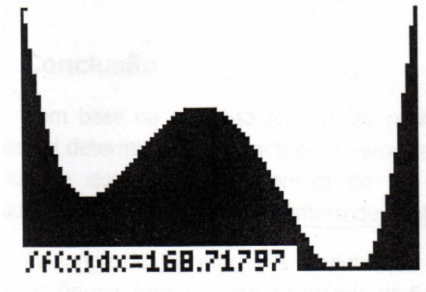
$A_t = 232{,}6\ m^2$

(RT4)

Deste modo, os alunos usam as figuras geométricas para analisar a situação e seleccionar uma forma de a resolver e para mostrar os seus raciocínios. Na entrevista, Carlos também utiliza as figuras geométricas para ajudar a organizar e explicar os seus raciocínios e para justificar as suas opções. Com base nelas (apontando), elabora uma argumentação descritiva e informal: “Este bocado… Que está aqui, é mais ou menos o bocado que falta aqui, ou seja o erro ia ser mais pequeno” (E4).

Ainda durante a entrevista, o aluno recorre às potencialidades da máquina de calcular para, de forma mais eficiente e exacta, encontrar uma solução baseada nos recentes conhecimentos de ajuste de curvas. Mostra o registo gráfico do resultado obtido através da máquina de calcular para explicar o seu raciocínio e descreve-o, também numa linguagem natural:

> A calculadora faz ajuste de curvas. Tínhamos à nossa disposição 5 pontos (…). Na máquina podemos fazer o integral da parte pintada da figura obtendo assim o valor da área a negro (…). A área da secção obtém-se fazendo a diferença entre a área do rectângulo e a área exterior à secção contida no rectângulo (área pintada a negro na figura).



(E4)

As figuras geométricas são, assim, o tipo de representação que o aluno usa nesta tarefa para visualizar as diferentes explorações que faz, para descrever/mostrar os seus raciocínios e processos de cálculo e para justificá-los. A representação gráfica tem uma presença reduzida, como estratégia alternativa, e o aluno utiliza-a para obter soluções e fundamentar os seus raciocínios. Apesar disso, essas representações são sempre acompanhadas de uma descrição em linguagem natural, talvez por Carlos as considerar insuficientes ou pouco formais.

Na realização de tarefas de investigação

Tarefa 1. A trabalhar em grupo, Carlos e os colegas começam a exploração desta tarefa procurando regularidades nos exemplos que são fornecidos no enunciado, relativos à utilização da regra da adição de intervalos de valores reais. Através da observação desses exemplos, os alunos identificam o padrão de construção dos intervalos e formulam, correctamente, uma conjectura para a regra da adição: "Chegamos a este resultado através da soma do mínimo e do máximo de cada um dos intervalos, seguindo os exemplos anteriores" (RT1). Os alunos generalizam, de imediato a regra e consideram-na válida para todos os intervalos de valores reais recorrendo apenas à procura de alguns contra-exemplos, de forma não sistemática e incompleta:

> Tentamos provar que existiam excepções como por exemplo a soma de dois conjuntos vazios ou a soma de um conjunto vazio com o conjunto dos números reais e ainda a soma de dois conjuntos de números reais, mas os resultados estão sempre de acordo com a regra. (RT1)

Para a subtracção, as conjecturas são incorrectamente formuladas por analogia com a regra da adição: "Conseguimos chegar a uma fórmula para a subtracção, $[x_1, x_2] - [y_1, y_2] = [x_1 - y_1, x_2 - y_2]$" (RT1). No grupo, Carlos não questiona a validade da regra e por isso não a verifica através de algum raciocínio que pudesse detectar os erros cometidos.

Também não a tenta justificar, apesar de ser fácil a partir de propriedades dos números já suas conhecidas. Nesta altura, é notória a falta de compreensão do que significa um intervalo resultante de uma operação aritmética entre dois intervalos de valores reais, uma vez que os exemplos dados para a adição não são suficientes para compreender as propriedades dos intervalos que são relevantes para a dedução e justificação das regras para outras operações.

Quando o grupo, novamente por analogia com a regra da adição, formula uma regra para a multiplicação, "$[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] = [x_1 \times y_1, x_2 \times y_2]$" (RT1), Carlos toma consciência que a regra nem sempre é válida e procuram um contra-exemplo:

> Observamos que multiplicando o maior valor de um intervalo com o menor de outro, o valor obtido não estava compreendido no intervalo que era descrito pelo produto dos dois valores mínimos até ao valor traduzido pelo produto dos dois valores máximos. Tomemos o exemplo para traduzir o que está descrito: $[-2, 1] * [3, 7] = [-6, 7]$. [Ora,] $-2 * 7 = -14$ não pertence ao intervalo $[-6, 7]$ como descrito acima. (RT1)

Durante a entrevista, o aluno explica como formula uma nova regra para a multiplicação, com uma base intuitiva:

> Nessa altura é que me apercebo que havia valores que estavam contidos nos intervalos iniciais e que depois da multiplicação já não estavam contidos nos finais e começo a pensar numa forma de ultrapassar esse problema. Teríamos que multiplicar os valores mínimos e máximos de ambos os intervalos de modo a abranger todos os números resultantes dessa multiplicação. Concluímos a seguinte regra: $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] = [\min C, \max C]$, em que C é o conjunto definido por $C = \{(x_1 \times y_1), (x_1 \times y_2), (x_2 \times y_1), (x_2 \times y_2)\}$. (E1)

Como esta operação não segue a regra observada no exemplo inicial, Carlos sente a necessidade de a verificar. No entanto, utiliza apenas um exemplo e confunde esse processo com a justificação, como refere na entrevista: "O exemplo prova isso mesmo: $[-2,1] \times [3, 7] = [\min C, \max C] = [-14, 7]$, com $C = \{(-2\times3), (-2\times7), (1\times3), (1\times7)\} = \{-6, -14, 3, 7\}$" (E1).

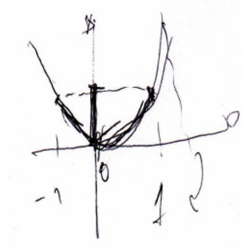
Seria de esperar que, nesta altura, os alunos voltassem atrás para verificar se a regra da subtracção também apresentava o conflito identificado, mas tal não acontece. Continuam o trabalho em grupo e formulam uma regra para a divisão, seguindo o mesmo tipo de raciocínio: “Da mesma forma que se aplica à multiplicação, aplica-se à divisão” (RT1). Durante a entrevista, Carlos justifica esta conjectura baseado nas propriedades das operações, tendo o cuidado de considerar as limitações inerentes à nova operação: “A divisão é a multiplicação pelo inverso, logo partimos desse princípio, que se funcionava para um caso, iria funcionar para outro. Só (…) temos que excluir os casos que não dá. O y_1 e o y_2 não podem ser zero” (E1).

Carlos considera a segunda questão “engraçada” porque:

> Inicialmente não a relacionamos com a questão 1 e olhamos para isso como funções e não olhamos como intervalos. E quando começámos a trabalhar com intervalos começámos a perceber que não funcionava da mesma maneira que os valores reais, tinham algumas características particulares. (E1)

Durante a realização da tarefa em grupo, os alunos aplicam directamente a regra da adição, deduzida na questão anterior, para calcular a imagem de um intervalo X através das funções f(X) = X+X e f(X) = 2X, que consideram serem expressões equivalentes. Quando a função pedida passa a ser $f(X) = X^2$, continuam a aplicar as regras deduzidas anteriormente, neste caso a da multiplicação, como Carlos explica: “Neste caso, o X^2 é um produto de dois intervalos e tínhamos que ir aplicar as regras da multiplicação que tínhamos encontrado na alínea anterior” (E1). Nos casos onde a função não é monótona, a regra da multiplicação de intervalos deduzida não é adequada e viola as intuições. Durante a entrevista, considero importante levar Carlos a reflectir sobre as suas respostas e a detectar e corrigir os erros. Através de questionamento, tento que o aluno recorde e explore as propriedades das funções e as aplique ao seu recém-formado conceito de intervalo. O aluno utiliza a representação gráfica da função quadrática e procura regularidades, com vista a uma generalização da regra, com base na geração de alguns exemplos, sem sistematização evidente. Também não gera os seus próprios exemplos, experimenta apenas os intervalos de valores reais que são dados no enunciado e cujas imagens coincidem com os resultados obtidos através da aplicação da regra da multiplicação deduzida. Questiono novamente (E1):

> Prof.ª: Qual seria a imagem do intervalo [-1,1] através desta função?
>
> Carlos: Iria ser de zero a 1.
>
> Prof.ª: E considera que são duas estratégias equivalentes?



Verifica $[-1, 1] \times [-1, 1] = [-1, 1]$, através da aplicação directa da regra e apercebe-se das diferenças: "Ou seja, não são iguais. A parábola só está definida de zero para cima, logo não faz sentido termos -1" (E1). Carlos fica confuso, uma vez que não compreende porque é que diferentes resoluções não conduzem a resultados iguais. No entanto, está convencido sobre a veracidade da regra da multiplicação deduzida e por isso não reflecte sobre estas contradições ou sobre a forma de as resolver e não altera a sua regra.

Em relação à função $f(X) = e^X$, o aluno já formula a regra $e^X = [e^{x_1}, e^{x_2}]$, baseado na análise do gráfico da função exponencial e tenta justificá-la fazendo referência às propriedades da função: "Foi uma análise do gráfico. A função é estritamente crescente de maneira exponencial com imagens positivas" (E1). É, no entanto, uma justificação descritiva, incompleta e informal.

Ao longo da exploração desta tarefa, Carlos formula várias conjecturas baseadas em analogias ou na identificação de padrões. Estas estratégias nem sempre permitem identificar algumas propriedades importantes para o processo de generalização que se apresenta, frequentemente, incorrecto. O aluno nem sempre tem a preocupação de testar as suas conjecturas e, quando o faz, apenas recorre à experimentação de alguns casos. O processo de justificação também tem uma presença reduzida.

Tarefa 2. Nesta tarefa, durante a realização do trabalho em grupo, os alunos começam por observar a sequência de intervalos consecutivos dados no enunciado, registam o cálculo da amplitude de cada um desses intervalos e identificam correctamente que o padrão de diminuição dos intervalos está relacionado com essa propriedade. Conjecturam então:

> Os intervalos diminuem de amplitude, para metade da amplitude anterior. Chegamos a essa conclusão subtraindo ao valor máximo do intervalo o valor mínimo.
>
> Cálculos: 2,000 – 1,000 = 1,000
> 1,500 – 1,000 = 0,500
> 1,500 – 1,250 = 0,250, etc. (RT2)

No entanto, como não usam toda a informação que está disponível, este trabalho está incompleto pois apenas permite identificar o padrão relativo a uma das propriedades dos intervalos, a amplitude, ficando por identificar o padrão de formação dos extremos. A escolha de um critério de decisão sobre o extremo do intervalo a reduzir, levanta algumas dúvidas uma vez que não conseguem identificar nenhuma regularidade apenas por observação. Embora não registem no seu trabalho, fazem várias tentativas para essa identificação, baseadas na contagem do número de vezes que cada extremo se mantém constante ou se altera, mas sem sucesso, como Carlos refere na entrevista: "Várias ideias surgiram até chegar aquela que nos pareceu correcta" (E2).

Só quando alertados para a informação disponível no enunciado, indicando que a raiz da equação está sempre contida nos intervalos é que os alunos, a trabalhar em grupo, identificam a regularidade que falta para poderem fazer uma descrição completa do modo de formação dos intervalos da sequência dada, permitindo-lhes responder ao que é pedido:

> O elemento do intervalo (máximo ou mínimo) que se encontrava mais distante do valor da raiz é que varia, mantendo-se o outro constante. Seguindo este raciocínio, o intervalo a seguir ao último dado ([1,281; 1,313]) é o seguinte:
>
> 1,313 – 1,281 = 0,032, portanto o próximo terá metade da amplitude que este, ou seja, 0,016. O elemento mais distante do valor da raiz, isto é 1,281, será aproximado em 0,016 passando a 1,297 sendo isto traduzido em [1,297; 1,313]. (RT2)

Os alunos consideram esta regra de formação válida depois de procederem à sua verificação para os elementos da sequência apresentada no enunciado.

O passo seguinte na exploração desta questão é estabelecer uma generalização. Na sequência dada, de um intervalo para o seguinte, ocorre uma transformação de acordo com uma lei de formação, compatível com os termos dados. A generalização dessa lei pelos alunos reflecte, em grande parte, o trabalho exploração que eles realizam anteriormente, identificando o que se mantém constante e o que varia:

> Passando os cálculos realizados nos intervalos anteriores a termos genéricos temos:
>
> Sendo a_i e b_i os extremos duma dada ordem do nosso intervalo, os seguintes serão deduzidos da seguinte forma: $b_i - a_i = c_i$, em c_i é a amplitude do intervalo. Então $c_{i+1} = c_i/2$ e o extremo mais distante de x (valor da nossa raiz) será acrescido ou decrescido do valor de c_{i+1}, sendo ele o extremo mínimo ou máximo respectivamente. (RT2)

Os elementos da sequência surgem, assim, por recorrência. Esta estratégia dificulta o trabalho subsequente pois é claramente desadequada para encontrar intervalos com uma ordem elevada. Confrontado com a necessidade de encontrar a ordem correspondente a um determinado elemento da sequência, Carlos constrói todos os elementos da referida sequência, afirmando na entrevista: "Como para saber um intervalo tenho que calcular o anterior, precisamos sempre de fazer todos. Se fosse preciso faria 50…" (E2). Parece não compreender as razões que conduzem à decisão sobre o extremo do intervalo que diminui e como não tenta aprofundar essa compreensão a justificação da regra não surge. Esta parece ser também a principal razão para a dificuldade com que se depara, e que não ultrapassa, para representar através de uma expressão algébrica as relações entre as propriedades do intervalo, nomeadamente a amplitude, e a sua ordem: "Numa regra indutiva, apenas sabemos o valor da amplitude, mas não garantimos que a raiz vai estar dentro do intervalo" (E2).

Carlos, nesta tarefa, formula as suas conjecturas com base na identificação de padrões a partir da observação de sequências numéricas e/ou contagens. As conjecturas são depois testadas, com base na experimentação de alguns casos (geralmente os exemplos disponíveis no enunciado) e generalizadas de forma imediata. O processo de justificação está ausente do trabalho do aluno.

Tarefa 3. Carlos e os colegas de grupo começam a exploração desta tarefa tentando identificar padrões no comportamento dos dados fornecidos, no enunciado, através de tabelas com alguns valores em falta. Para isso, calculam as diferenças entre os valores dados na primeira tabela e, como identificam um padrão constante entre eles, conjecturam, correctamente, um comportamento linear. Assim, optam por "utilizar a regra de três simples" (RT3) para encontrar os valores em falta. Nas outras tabelas, verificam, também através do cálculo das diferenças entre os valores, que a relação linear anteriormente encontrada, deixa de existir. No entanto, os alunos não utilizam a informação disponível para identificar os novos comportamentos e formular as conjecturas seguintes e aplicam os métodos de interpolação polinomial já conhecidos, de forma rotineira, sem qualquer reflexão ou compreensão do que está na base da sua escolha e construção. A ideia, nem sempre correcta, de que quanto maior o grau do polinómio a construir, melhor a aproximação aos dados e menor o erro, domina as suas conjecturas: "Através do grau do polinómio, aproximamo-nos cada vez mais do valor pretendido" (RT3).

Carlos propõe ao grupo a realização de diferentes explorações. Por exemplo, tendo em conta o comportamento dos dados, começa por construir a expressão algébrica de um polinómio do 2.º grau, com base na definição e nas propriedades básicas dos polinómios e utiliza-a para interpolar o valor 3:

Fomos calcular a expressão do polinómio:

$$
\begin{array}{l}
p_2(1)=40 \\
p_2(2)=85 \\
p_2(4)=220
\end{array}
\quad
\begin{cases}
a_0+a_1x+a_2x^2=40 \\
a_0+a_1x+a_2x^2=85 \\
a_0+a_1x+a_2x^2=220
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
a_0+a_1+a_2=40 \\
a_0+2a_1+4a_2=85 \\
a_0+4a_1+16a_2=220
\end{cases}
\quad (...)
$$

$p_2(x) = 22{,}5x + 7{,}5x^2 + 10$ (RT3)

Durante a entrevista, o aluno explica: “Já tinha aquele conhecimento dos polinómios, tentei ajustar isto à interpolação” (E3). Considera, ainda, que esta formulação pode ser “melhorada” se utilizar diferentes expressões algébricas (neste caso, polinomiais) para representar o comportamento dos dados apresentados na tabela (em vez da expressão única encontrada). Assim, identifica vários padrões nesse comportamento (através dos cálculos anteriormente realizados) e relaciona a escolha dos graus dos polinómios a construir com o número de pontos disponíveis e com a monotonia dos mesmos. Recorre novamente à definição e às propriedades básicas dos polinómios para formular conjecturas sobre as novas expressões polinomiais que constrói:

> Olhando para os dados, verifiquei que havia 3 valores que cresciam, em 5 diminuía e depois em 8 volta a crescer. Claro que em 6 poderia estar ainda a diminuir, mas isso não sabemos… Neste caso, pensei em dividir em 3 intervalos, [1, 4[, [4, 5[, [5, 8[e obter uma função definida por ramos.

$$
\begin{array}{l}
P_1(4)=220 \\
P_1(5)=210
\end{array}
=
\begin{cases}
a_0+a_1x=220 \\
a_0+a_1x=210
\end{cases}
=
\begin{cases}
a_0+4a_1=220 \\
a_0+5a_1=210
\end{cases}
\quad
\begin{array}{l}
a_1=-10 \\
a_0=260
\end{array}
$$

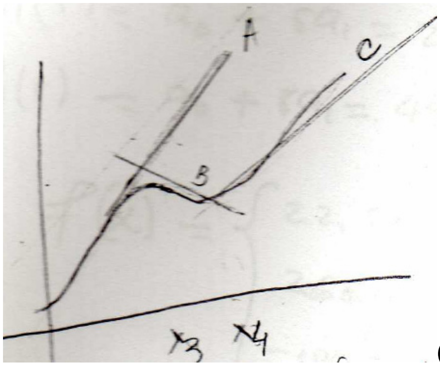
$$
\begin{array}{l}
P_1(5)=a_0+5a_1=210 \\
P_1(8)=a_0+8a_1=400
\end{array}
\Longleftrightarrow
\begin{cases}
a_1=\frac{190}{3}=63.3333 \\
a_0=-106.5
\end{cases}
\Rightarrow
$$

$$
f(x)=\begin{cases}
22.5x+7.5x^2+10 & [1,4] \\
260-10x & [4,5[\\
-106.5+63.33x & [5,8[
\end{cases}
$$

(E3)

Carlos ainda se preocupa em verificar se os resultados que encontra estão de acordo com os esperados e com os raciocínios desenvolvidos: “Foi uma espécie de verificação, se estes polinómios eram bons para aquele intervalo de valores" (E3). Para essa verificação recorre a uma representação gráfica, embora pouco elaborada e às propriedades de funções (monotonia e derivada):

> Eu até fiz aqui um rabisco… Foi através da observação da tabela (…). Daqui aqui era crescente, daqui aqui (…). Logo os polinómios tinham que ser crescentes ou decrescentes e os valores das derivadas tinham que ser positivas ou negativas (…).



(E3)

Na questão seguinte, os alunos têm que seleccionar, entre três modelos matemáticos fornecidos, o que descreve melhor o conjunto de dados disponíveis. A trabalhar em grupo, os alunos começam a exploração recorrendo à máquina de calcular, como meio auxiliar na representação dos dados e dos gráficos das funções fornecidas. Conjecturam, então, que o melhor modelo é aquele cujo gráfico se aproxima mais dos valores da tabela. Comparam, visualmente, os gráficos das três funções dadas no enunciado e eliminam imediatamente o modelo linear: "No início verificamos que nas três primeiras horas, duas das funções se aproximam dos valores indicados na tabela (…): $y = 82x^2 - 139x + 650$ e $y = 392\ e^{0,3x}$" (RT3). Quando têm que decidir entre estes dois modelos, procuram um critério mais objectivo para a selecção, baseado no cálculo das imagens dos valores dados na tabela através dos diferentes modelos propostos: "Através de uma análise mais rigorosa da tabela que contém os valores dados e os obtidos para os modelos matemáticos (…)" (RT3). Usam as diferenças entre os valores obtidos através dos modelos e os valores dados, como critério, e seleccionam aquele que apresenta a menor média dessas diferenças, como explica Carlos durante a entrevista:

> A análise foi comparar (…) com base nas diferenças entre os valores dados e os obtidos nas várias funções. Optámos por valores médios das diferenças, em vez de considerarmos os afastamentos individuais. Fomos

> fazer uma média aritmética e o menor valor dessa média dava-nos a melhor função. (E3)

Embora o aluno não justifique o critério escolhido, está implícito que valoriza, correctamente, a totalidade dos erros em relação aos afastamentos individuais e revela, assim, que é capaz de construir, intuitivamente, um critério tão complexo como o que está na base do método dos mínimos quadrados.

Nesta tarefa, Carlos já utiliza diferentes estratégias para formular as suas conjecturas. Além da identificação de padrões, o aluno recorre a definições e propriedades matemáticas e à representação gráfica para as formular e refinar. O teste de conjecturas também é realizado graficamente ou recorrendo a propriedades matemáticas. O processo de justificação continua ausente do trabalho do aluno.

Tarefa 4. Carlos explica, na entrevista, porque é que o grupo faz várias explorações e usa esquemas geométricos com diferentes níveis de elaboração para formular conjecturas sobre o valor aproximado da área da figura representada no enunciado: "Todas as decisões que tomámos foram na tentativa de minimizar o erro. Foi a conclusão que chegámos no final da outra tarefa, que o objectivo é chegar aos valores (…) através do menor erro" (E4). O aluno refere, ainda, que na primeira exploração baseia-se numa figura geométrica, bastante elementar e conjectura que a área aproximada da figura pode ser obtida através do cálculo da área de um rectângulo: "Consideramos um rectângulo básico que dava 450" (E4). Carlos justifica esta opção e o resultado: "Como o rio tem uma largura máxima de 30 metros e profundidade máxima de 15 metros, logo é possível afirmar que a área da secção está contida num rectângulo de dimensões 30 × 15" (E4). O aluno assume, assim, a existência de uma solução inicial que depois vai refinar. Assim, conjectura novamente, que a figura pode ser representada por um rectângulo mas joga com a compensação das áreas: "Para o erro ser menor, o valor da altura considerado foi o valor médio (10,5)" (E4).

No trabalho de grupo, os alunos continuam a explorar a utilização de outras figuras geométricas como base para o cálculo da área da figura proposta até decomporem essa imagem em várias figuras mais pequenas cujas áreas são conhecidas e mais fáceis de calcular (rectângulos, triângulos e trapézios). Têm o cuidado de descrever e justificar quais os pressupostos que assumem em cada exploração, baseados numa análise visual das figuras:

> Como nos foi dado o valor do ponto c, sabemos o afastamento em relação à largura que são 7m, como sobra 23m e temos 3 distâncias nesse espaço, supusemos que essas distâncias seriam iguais e fomos obter o valor de 7,6 para as restantes partes e a partir daí fomos utilizar esses valores e o valor das profundidades que já tínhamos para fazer os cálculos dessas áreas de triângulos e rectângulos.

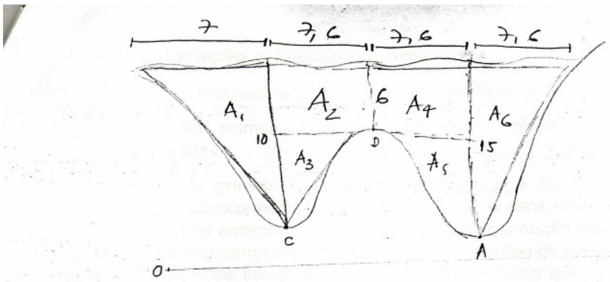


fig. 2

Como o intervalo de 0 a c mede 7, dividimos os restantes 23m em três partes iguais.

A área total será:

$$A_t = \sum_{i=1}^{6} A_i$$

$A_1 = \frac{7\times10}{2} = 35$

$A_2 = 7,6\times6 = 45,6$

$A_3 = \frac{7,6\times4}{2} = 15,2$

$A_4 = 7,6\times6 = 45,6$

$A_5 = \frac{7,6\times9}{2} = 39,2$

$A_6 = \frac{7,6\times15}{2} = 57$

Substituindo os valores de $A_1, A_2, \dots, A_n$ em A_t temos:

$A_t = 35+45,6+15,2+45,6+34,2+57.$

$A_t = 232,6\,m^2$

(RT4)

Os alunos, também avaliam a proximidade do valor real ao resultado encontrado em cada exploração com base numa análise visual das figuras desenhadas:

> Surge o facto da secção, à primeira vista e por nossa aproximação, aparentar ser uma figura geométrica próxima do trapézio (…) e se isto estivesse mais ou menos feito à escala, nesta imagem temos a largura do rio (30m) como base maior e a base menor será a do ponto c à profundidade do ponto médio (…). (RT4)

Durante a entrevista, Carlos acrescenta uma nova exploração, usando os conhecimentos recém-adquiridos. Conjectura, então, que a área da figura pode ser obtida através do cálculo integral e da interpolação polinomial: "Podemos ainda arranjar uma função através da interpolação de Lagrange, fazer o integral entre essa função e a nossa linha e íamos ter a área da secção" (E4). O aluno depara-se com a dificuldade de não ter dados suficientes para realizar, com sucesso, a exploração descrita, tal como é pensada, mostrando ter sentido crítico relativamente aos resultados obtidos (E4):

> Prof.ª: Qual a dificuldade que encontra?
>
> Carlos: Estava a dar valores (…) irreais para os intervalos que estávamos a falar. Temos uma altura máxima entre 0 e 15, nunca nos pode dar uma altura de 22 ou 24.
>
> Prof.ª: Porque é que utiliza o polinómio de Lagrange?
>
> Carlos: Isto supostamente… O objectivo era… Tínhamos estes pontos, tínhamos as alturas e tentamos através de interpolação polinomial encontrar os valores que precisávamos, mas estava a dar valores que não faz sentido. Usava os pontos que tinha [3 pontos].
>
> Prof.ª: Mas com três pontos, através de Lagrange, que polinómio consegue construir?
>
> Carlos: Uma parábola, por isso é que estava a dar valores muito grandes, tinha um erro muito grande, por isso desisti da ideia, não vale a pena estar a investir sobre uma coisa que não nos dá garantias.

Como identifica claramente os obstáculos, reformula a conjectura alterando a condição que lhe permite ultrapassar a dificuldade referida e chegar ao resultado pretendido. Nesta altura opta por um método de resolução mais eficiente, recorrendo às potencialidades da máquina de calcular para ajustar uma função polinomial do 4.º grau. Ainda justifica esta escolha com base nas propriedades das funções, de forma a permitir obter, tanto quanto possível, uma função próxima da figura dada no enunciado: "Conseguir uma função de grau quatro, visto que a secção do rio apresenta 3 concavidades" (E4).

Nesta tarefa, Carlos utiliza as figuras geométricas, juntamente com algumas propriedades matemáticas, para formular e refinar as suas conjecturas. O processo de justificação de conjecturas, já frequente nesta tarefa, é também realizado com uma base nas figuras e em algumas propriedades matemáticas.

Na resolução de problemas

Tarefa 1. O empenho inicial de Carlos no problema envolve a leitura do enunciado, individualmente. O aluno identifica facilmente os dados e a questão do problema e, durante a entrevista, explica como interpreta a informação disponibilizada: "Temos um comprimento aproximado, logo pode variar de acordo com o erro dado. E vamos dividi-lo por outra medida que também tem um erro associado" (E1).

A trabalhar em grupo, os alunos baseiam-se nos conhecimentos recentemente adquiridos de erro e valor aproximado e estabelecem um plano inicial que consiste na decomposição do problema em sub-problemas. Isto é, começam por encontrar um valor aproximado para a divisão dos intervalos, depois calculam o erro associado a esse valor e, no final, combinam os dois resultados para elaborar uma resposta para o problema, como explica Carlos, na entrevista: "Numa primeira abordagem calculamos um valor padrão. Consideramos primeiro um valor padrão que é o resultado sem erro e depois vamos calcular o erro" (E1). Para executarem este plano, os alunos, começam por usar as operações aritméticas básicas e calculam a divisão dos dois valores aproximados, sem ter em conta os respectivos erros, cujo resultado chamam de "valor padrão": "Denominamos esse valor como valor padrão, que equivale à divisão de d por c, obtendo-se o valor de 1,(6)" (RT1). Depois reflectem sobre o que necessitam para prosseguir com o plano inicial e apercebem-se que não têm estratégia definida para o cálculo do valor do erro. É Carlos quem propõe uma estratégia que envolve uma análise exaustiva de todos os casos possíveis para o resultado da divisão entre os dois valores. Para isso, os alunos organizam a informação retirada do enunciado numa tabela para ajudar a sistematizar os cálculos e resultados. Utilizam a definição de erro e de valor aproximado e chegam à resposta correcta, realizando cálculos simples (operações elementares) com os dados do problema, como planeado:

> Seguidamente criamos uma tabela que contém os valores de d e c somando/subtraindo o valor do erro correspondente e o resultado da operação pretendida.
>
> | C\D | 1,19 | 2,10 |
> |---|---|---|
> | 1,18 | 1,61 | 1,78 |
> | 1,22 | 1,56 | 1,72 |
>
> Utilizamos o maior e o menor dos valores obtidos e calculamos o erro inferior e superior correspondente, fazendo a diferença para o valor de referência, que concluímos serem iguais. (RT1)

Durante a entrevista, Carlos interpreta o resultado obtido e relaciona-o com os conceitos de valor aproximado e de erro: "O que vimos foi qual é a possibilidade que o valor padrão tem de falhar. Tanto acima como abaixo pode falhar…" (E1). No entanto, não verifica os cálculos nem o resultado, talvez porque se mostra confiante no trabalho que desenvolve. O aluno refere, ainda, que pode chegar ao mesmo resultado de outra maneira, utilizando os conhecimentos recentemente adquiridos de aritmética intervalar:

> Fizemos um intervalo mas não demos conta disso. Porque nós fizemos o maior valor por excesso e por defeito… Mas depois não utilizámos a regra nem dissemos que eram intervalos e isso era importante… Encontrámos um resultado por excesso e por defeito, o maior valor e o menor valor do resultado possível, ou seja o intervalo possível. (E1)

Carlos mostra, assim, ter os recursos necessários (também ao nível de conceitos e procedimentos recentes de aritmética intervalar) para resolver o problema de formas diferentes. Apesar disso, o aluno não reflecte sobre a eficiência e a eficácia das várias estratégias de que dispõe e que utiliza nas várias fases do processo de resolução.

Nesta tarefa, o aluno tem facilidade em interpretar o problema e em identificar os dados. Revela, também, ser capaz de estabelecer um plano e utilizar as estratégias adequadas para o executar e encontrar uma solução. No final, interpreta correctamente os resultados, embora não os verifique. Apesar de explorar estratégias alternativas à resolução do problema, Carlos não reflecte sobre a sua eficiência.

Tarefa 2. O trabalho de grupo em torno da última questão desta tarefa inicia-se com a leitura individual do problema. Os alunos identificam facilmente os dados e, na tentativa de dar sentido ao problema, substituem as incógnitas na expressão fornecida no enunciado: "Fomos substituir o valor de cada uma das incógnitas na fórmula anterior, pelos valores dados (…) e a equação ficava da seguinte maneira: (…)" (RT2).

O plano que os alunos estabelecem inicialmente contempla a resolução analítica da equação, isolando a variável através de manipulação algébrica. No entanto não são bem sucedidos nas suas tentativas de execução deste plano: "Tentamos resolver a equação em ordem a *t* mas só conseguimos obter a seguinte simplificação: (…)" (RT2). Carlos reconhece a não linearidade da equação e sugere aos colegas de grupo um novo plano, utilizando a máquina de calcular para encontrar um valor aproximado para o problema, como explica na entrevista: "Como não nos foi possível resolver analiticamente [a equação], tentei abordar uma forma diferente de resolver o problema" (E2). O aluno demonstra, assim, capacidade de avaliar e modificar estratégias, atitudes que parecem revelar algum controlo sobre o processo de resolução do problema. Além disso, a decisão tomada tem influência na solução pois determina a eficácia e eficiência do processo de resolução.

O novo plano compreende a representação gráfica da equação e encontrar uma solução aproximada, recorrendo às capacidades da máquina de calcular. Os alunos, a trabalhar em grupo, consideram um problema equivalente, cuja resolução soluciona o problema inicial. Assim, começam por manipular algebricamente a expressão da equação de modo a decompô-la em duas funções e, com o auxílio da máquina de calcular, representam-nas graficamente e procuram o ponto de intersecção entre elas:

> Essa forma [diferente de abordar o problema] implica a visualização gráfica de duas funções:$F(t) = v + gt$
>
> $G(t) = u*\ln(m_0/(m_0+qt))$
>
> Calculamos a intersecção das duas funções, e o ponto de intersecção obtido foi $t = 25{,}942393$. (RT2)

Este trabalho revela um conhecimento de conceitos e propriedades matemáticas (relacionados com funções, por exemplo) e a familiarização com procedimentos de rotina (de resolução de equações), que Carlos parece ter. A resposta ao problema é correcta mas o aluno não verifica a solução encontrada, talvez por considerar que o valor está de acordo com o esperado. Na entrevista, o aluno dá significado ao valor obtido no contexto do problema: "Aplicado ao problema, significa que ao fim de cerca de 26 segundos é atingida a velocidade de 1000 metros por segundo" (E2).

Carlos, nesta tarefa, tem facilidade em interpretar o problema e em identificar os dados. O aluno revela, igualmente, que é capaz de estabelecer um plano e utilizar as estratégias adequadas para o executar e encontrar uma solução. Além disso, quando o plano não o conduz à solução pretendida, o aluno volta atrás e propõe um novo plano alternativo. Embora não sinta necessidade de verificar os cálculos ou os resultados, o aluno dá uma resposta correcta ao problema e contextualiza a solução. No final, também não procura outra forma de resolver o problema nem reflecte sobre a eficiência do processo de resolução que utiliza.

Tarefa 3. Na última questão desta tarefa, Carlos mostra facilidade em identificar e interpretar os dados fornecidos. Durante a entrevista, o aluno dá sentido ao problema expressando-o noutros termos, usando uma linguagem natural: "Tínhamos uma experiência em que tínhamos 8 máquinas que eram postas a várias tensões e apresentavam [tempos de] falhas diferentes" (E3). O aluno explica, ainda, que o seu plano inicial contempla a construção de uma função que descreva adequadamente o comportamento dos dados fornecidos. Enquanto pensa na forma de executar este plano, considera apropriado fazer a representação gráfica dos dados do problema para tentar identificar algum padrão. No entanto, depara-se com uma dificuldade: "Aquilo que pensei fazer foi construir um gráfico, mas tínhamos um problema. Tínhamos um objecto que fazia corresponder a mais do que uma imagem e isso não era função" (E3). Este facto contradiz o seu conceito de função e torna-se um obstáculo à construção da referida função. Para ultrapassar esta dificuldade, o aluno propõe uma estratégia alternativa que passa por reformular o problema original, reduzindo os dados e adequando-os ao seu conceito de função, como explica: "Um método que utilizámos para resolver este problema foi fazer a média dos tempos. Assim, cada objecto correspondia a uma imagem, isto é, para cada tensão tínhamos uma média dos tempos" (E3). Mais uma vez, o aluno revela ser capaz de avaliar as estratégias iniciais e propor alternativas quando reconhece que as primeiras não são válidas.

Na realização do trabalho em grupo, os alunos usam o conceito de média e utilizam cálculos simples para estimar a média dos tempos de falha das máquinas para cada uma das três voltagens a que foram sujeitas e reduzem, assim, os dados do problema a três valores. Registam estes cálculos e concluem a tarefa com uma resposta incompleta:

> Fizemos a média para verificar se a máquina, ao passar para um "modelo" [leia-se valor] seguinte, ou seja de 110 para 115 e depois para 120, os valores em tempo iriam alterar em média. Verificámos que esse tempo aumenta à medida que mudamos a máquina.
>
> $$Y(110) = \frac{2145 + 2155 + 2225}{3} = 2175$$
>
> $$Y(115) = \frac{2212 + 2189}{2} = 2196$$
>
> $$Y(120) = \frac{2260 + 2334 + 2340}{3} = 2311 \text{ (RT3)}$$

Na entrevista, Carlos comenta os resultados referindo a tendência crescente que identifica no valor das médias à medida que o valor da tensão também aumenta. No entanto, não faz qualquer tentativa de a quantificar ou descrever formalmente através de modelos matemáticos que já conhece. Isto só é possível se utilizar os recentes conhecimentos de interpolação ou regressão e, como tal não acontece, a resposta ao problema fica incompleta.

Nesta tarefa, o aluno mostra facilidade na interpretação dos dados e da questão do problema proposto. Apesar de ser capaz de propor um plano alternativo, quando verifica que a execução do inicial não o conduz a uma solução, Carlos dá uma resposta descritiva e incompleta ao problema e não faz qualquer tentativa de exploração de estratégias alternativas ou mais eficientes.

6.3. Aprendizagens do aluno em Análise Numérica

Desenvolver metodologias e acções capazes de promover nos alunos aprendizagens significativas é também um dos objectivos deste estudo. A análise do trabalho realizado por Carlos na exploração das tarefas propostas e do seu desempenho nos testes de avaliação permite afirmar que se verificam aprendizagens significativas, ao nível de conceitos e procedimentos da Análise Numérica. Este aspecto é, inclusivamente, reconhecido pelo aluno: "Nós adquirimos os conceitos base pretendidos para a cadeira de Análise Numérica" (E4).

A análise de erros é um tema transversal a todo o programa pelo que a compreensão dos conceitos de valor aproximado e de erro é fundamental para abordar todos os tópicos. Estes conceitos parecem-me terem sido compreendidos por Carlos uma vez que os utiliza de forma correcta em várias tarefas. Por exemplo, na última questão da tarefa 1, é capaz de relacionar os erros com o próprio conceito de intervalo:

> Encontrámos um resultado por excesso e por defeito, o maior valor e o menor valor do resultado possível, ou seja o intervalo possível. Encontrámos um valor padrão, dividimos sem erro… O afastamento do valor padrão ao valor máximo e ao valor mínimo… Vimos a distância… E encontrámos o erro. (E1)

O aluno também utiliza estes conceitos nos testes de avaliação. No primeiro teste, por exemplo, o aluno atribui erros, de forma correcta, aos valores aproximados dados no enunciado, embora não descreva o raciocínio que usa: "$H = 5 \pm 0,5$ e $R = 10 \pm 0,5$" (T1). Além disso, é capaz de relacionar o valor do erro com o número de algarismos significativos, revelando compreensão destes dois conceitos: "O erro do valor aproximado é $0,5 \times 10^{-4}$ para tornar todos os algarismos relevantes, significativos" (T1).

A correcta identificação das fontes de erro e a preocupação em diminuí-los é também visível, na escolha das estratégias que usa, tanto nas tarefas 3 e 4, como nos testes de avaliação. Calos mostra assim que domina o conceito de erro e é capaz de escolher a alternativa mais adequada para aplicar à situação com que se depara:

> A escolha do grau do polinómio, permite aproximar-nos cada vez mais do valor verdadeiro. (E3)

> [Com 3 pontos consigo construir] uma parábola, por isso é que nos estava a dar valores muito grandes, tinha um erro muito grande, por isso desistimos da ideia, não valia a pena estar a investir sobre uma coisa que não nos dá garantias. (E4)

> Para os valores compreendidos entre 0,25 e 0,70 utilizo a regra de Simpson 3/8 e entre 0,7 e 0,8 a de Simpson 1/3, pois é nestes intervalos que os valores dos nós estão igualmente espaçados, diminuindo assim a margem de erro associado. (T2)

Carlos compreende, igualmente, as regras da aritmética intervalar, pois identifica os procedimentos e é capaz de os aplicar na resolução do problema final da tarefa 1:

> Porque nós fizemos o maior valor por excesso e por defeito… E dividimos pelo maior e menor valor. Ou seja, isso acaba por transformar em intervalos (…). Fizemos esse pensamento e fizemos uma tabela apesar de não utilizarmos a regra, nem dissemos que eram intervalos… (E1).

Alguns conceitos, que fazem parte do programa da disciplina mas ainda não trabalhados nas aulas, são construídos pelo aluno, de forma intuitiva, durante a exploração das tarefas propostas. Deste modo, o aluno desempenha um papel fundamental na sua aprendizagem. Na tarefa 3 é notória a capacidade de, intuitivamente, utilizar conceitos ainda não trabalhados, como é o caso da regressão através do método dos mínimos quadrados. Carlos utiliza o módulo das diferenças entre os valores experimentais dados e os valores obtidos com os diferentes modelos matemáticos que explora, como erros, para seleccionar o melhor ajustamento:

> A análise foi comparar (…) com base nas diferenças entre os valores dados e os obtidos nas várias funções. Optámos por valores médios das diferenças, em vez de considerarmos os afastamentos individuais. Fomos fazer uma média aritmética e o menor valor dessa média dava-nos a melhor função. (E3)

É este conceito de erro e a sua minimização que está na base da construção do método dos mínimos quadrados que é, habitualmente, de difícil compreensão pelos alunos mas que Carlos acaba por utilizar também noutras tarefas. Por exemplo, na última tarefa, o aluno recorre à máquina de calcular para ajustar, aos dados que tem disponíveis, uma função que represente a imagem dada no enunciado: "Utilizamos a máquina para ajustarmos a função de grau quatro que queríamos encontrar para a secção do rio, que apresenta três concavidades" (E4). No segundo teste de avaliação, o aluno também utiliza o ajuste de curvas, como solicitado, para encontrar o modelo exponencial que representa a tendência verificada nos dados fornecidos no enunciado. Nesta altura, o aluno lineariza o modelo pretendido, através de manipulação algébrica, para depois poder aplicar o método dos mínimos quadrados, revelando que o compreende e sabe utilizar:

> $Y = \mathrm{a}e^{\mathrm{b}x}$ linearizando sai $\ln Y = \ln \mathrm{a} + \mathrm{b}x$
>
> Temos que obter os valores de: $\overline{\mathrm{x}}$, $\overline{\ln \mathrm{y}}$, $\sum \mathrm{x_i}$, $\sum \ln \mathrm{y}$, (…)
>
> Calculamos o valor de a e b substituindo estes valores na fórmula da regressão linear. (T2)

Embora a interpolação polinomial seja apresentada aos alunos em aulas expositivas e através de resolução de exercícios, o aluno é capaz de mobilizar esses conhecimentos e respectivos procedimentos na realização de tarefas onde se apresentam novas situações. Por exemplo, na tarefa 4, Carlos justifica a escolha do método da regressão para fazer o ajuste e indicia que compreende as diferenças entre os conceitos de interpolação e de ajuste de curvas:

> O ajuste de curvas iria dar uma função mais próxima… É a função mais próxima daquela que nos é dada. O facto de passar pelos pontos não implica que seja a função mais próxima daquela. (…) Uma função que passa por aqueles pontos é diferente da que está desenhada. O método da interpolação dá-nos uma função que passa por aqueles pontos, não implica é que seja a função que nós precisamos. Depois ia dar uma área de secção com um valor diferente. Por isso é que o ajuste de curvas seria o mais indicado mesmo com erro e não passando em todos os pontos seria o mais próximo possível da função com queríamos trabalhar logo o resultado seria também mais próximo. (E4)

A interpolação polinomial surge, igualmente, nos dois testes de avaliação. O aluno responde correctamente às questões relacionadas com este tópico e revela ter compreendido os seus procedimentos e as condições necessárias para a sua aplicação pois é capaz de seleccionar o método mais adequado a cada situação, como descreve:

> Vamos utilizar um polinómio de Newton de 3.º grau, através das diferenças divididas pois os nós não estão igualmente espaçados. Como o polinómio é do 3.º grau necessitamos de 4 pontos [nós] que serão seleccionados de acordo com a proximidade do nó pretendido, neste caso 0,45. Será seleccionado, também, mais um ponto [nó] para a obtenção do valor do erro através da diferença dividida de grau n + 1 (…). (T2)

A realização das tarefas de investigação permite, ao aluno, fazer várias explorações das questões, utilizar uma variedade de estratégias na sua resolução e confrontar o seu trabalho com outras abordagens diferentes mas igualmente possíveis, como refere: "Num trabalho de investigação pode ocorrer imprevistos que mais tarde nos podem ajudar a resolver a tarefa. Mesmo os palpites que não verificam o problema, levam a decidir outros caminhos de resolução do mesmo" (E1). Deste modo, Carlos toma consciência da existência de diferentes abordagens e estratégias para a sua exploração e, em particular, para a resolução de problemas. Isto reflecte-se, também, no seu desempenho nos testes de avaliação. Por exemplo, no segundo teste, o aluno resolve o problema utilizando estratégias diferentes, de forma intencional e avalia, inclusivamente, a sua eficiência:

> Podemos abordar este problema de variadíssimas formas. Uma delas através da obtenção dos valores médios da tabela (…). Outra seria através do ajuste de curvas anteriormente estudado. (…). Mas a fim de diminuir o erro associado a estes [resultados], iremos optar pela segunda abordagem do problema, o ajuste. (T2)

A aquisição de conhecimentos de Análise Numérica não esgota o processo de aprendizagem de Carlos. É ele próprio que refere: "Em termos de aprendizagem? É também a outros níveis, não só da matéria" (E1), especificando as aprendizagens significativas que considera ter realizado: "O contacto com outras formas diferentes de pensar e raciocinar e a capacidade de comunicação" (E5). De facto, nota-se uma evolução clara também na forma como o aluno responde às questões dos testes e que se repercute nas classificações que obtém. O aluno tem um desempenho fraco no primeiro teste de avaliação (classificação de 9 valores). Nesta altura, limita-se a aplicar os métodos (fórmulas) de forma rotineira, sem reflectir sobre as opções disponíveis e sem as justificar. Por isso, as opções que faz, nem sempre são as mais adequadas e, algumas vezes, a resolução dos exercícios fica incompleta ou conduz a resultados errados. A abordagem aos problemas é feita de forma única e sem utilizar os conhecimentos mais recentes relativos à disciplina, apesar de conduzir a resultados correctos.

No segundo teste, Carlos melhora um pouco a sua classificação (13 valores) pois os exercícios de aplicação de conhecimentos estão, maioritariamente, correctos. As suas respostas são bastante completas, com todas as opções e raciocínios descritos detalhadamente e justificados com base em teoremas e propriedades matemáticas. Na resolução dos problemas, o aluno já aplica os conhecimentos abordados mais recentemente, desde que seja capaz de o classificar e já apresenta, algumas vezes, diferentes estratégias de resolução. Além disso, tem o cuidado de explicar e justificar as suas estratégias e raciocínios. Estes aspectos permitem avaliar a eficiência das estratégias e, assim, obter resultados mais exactos. Deste modo, o aluno revela compreender, também, a importância de alguns dos processos associados à resolução de problemas.

6.4. Síntese

Uso de diferentes representações. Na exploração das tarefas propostas, Carlos mostra preferência pelos métodos algébricos de representação, mesmo quando o uso de outro tipo de representação (por exemplo, a gráfica) é uma abordagem mais eficiente. Em quase todas as tarefas, o aluno opta por usar a manipulação algébrica para deduzir regras e encontrar soluções. No entanto, a escolha da representação algébrica nem sempre é adequada porque, além de não facilitar a identificação de padrões no comportamento de valores numéricos de forma a auxiliar a selecção de estratégias de resolução mais eficientes, também não permite detectar e resolver conflitos e/ou erros nos resultados apresentados pelo aluno. Como não usa outro tipo de representação que permita corrigir os seus resultados, as respostas obtidas pelo aluno, com base na representação algébrica, nem sempre estão correctas. Mesmo quando confrontado com resultados diferentes, obtidos através de diferentes representações, o aluno opta pela solução algébrica, na qual confia mais. Só quando identifica a inviabilidade na obtenção de resultados através da representação algébrica é que o aluno recorre a outras formas de representação, como os gráficos, as tabelas ou as figuras geométricas.

Nas primeiras tarefas, Carlos mostra-se reticente quanto à utilização de representações gráficas que têm, por isso, uma presença bastante reduzida no seu trabalho. O aluno só utiliza a representação gráfica quando é explicitamente solicitado a fazê-lo ou quando não tem disponíveis, entre os seus recursos, outras representações que permitam obter soluções. Neste caso, mostra competência no uso desta forma de representação pois interpreta correctamente os gráficos e os resultados obtidos. No decorrer da experiência de ensino, nota-se um aumento gradual do recurso à representação gráfica também para analisar e desenvolver compreensão sobre a informação disponibilizada no enunciado, como suporte e ilustração de raciocínios e para confirmar resultados obtidos através de outras formas de representação. Nestes casos, o aluno utiliza a calculadora gráfica e as suas potencialidades como uma ferramenta auxiliar para desenhar gráficos e para obter soluções de forma eficiente, sem realizar cálculos.

Carlos utiliza, também, outra forma de representação – a tabela. Em algumas tarefas, o aluno recorre a tabelas para organizar a informação necessária à realização de cálculos, para facilitar a sua execução e para apresentar os resultados. As tabelas servem, ainda, para o aluno encontrar soluções que confirmem as que obtém através de outras formas de representação.

Na última tarefa, são as figuras geométricas que dominam o trabalho de Carlos e são escolhidas de forma adequada a organizar o raciocínio para encaminhar a resolução dos problemas. O aluno utiliza-as, numa primeira fase, como suporte intuitivo para as suas explorações, permitindo antecipar os seus resultados e seleccionar as diferentes formas de as resolver e, numa segunda fase, para ilustrar e justificar os seus raciocínios e processos de cálculo. A falta de dados disponíveis no enunciado da tarefa parece ter determinado a utilização desta forma de representação como sua primeira opção, uma vez que o aluno recorre à manipulação algébrica para explorar a tarefa assim que obtém os dados que julga necessários à obtenção de uma solução através desta estratégia. Nesta altura utiliza a máquina de calcular para obter, de forma eficiente, a expressão algébrica de funções e o resultado da sua integração.

Carlos parece considerar difícil o uso da notação simbólica como um veículo para expressar os seus raciocínios, a avaliar pelas suas respostas essencialmente descritivas. O aluno utiliza a linguagem natural em todas as tarefas para explicar os seus raciocínios e para descrever e justificar os processos de obtenção de soluções, mesmo quando estes têm como base uma das outras representações já referidas. Quando tenta generalizar ou formalizar as suas respostas, o aluno utiliza a mesma linguagem natural mas complementa-a com alguma notação simbólica. Nesta altura, procura seleccionar os símbolos matemáticos adequados e utilizá-los de forma correcta para traduzir o que descreve informalmente.

É de salientar, ainda, a facilidade que o aluno revela, por diversas vezes, em estabelecer relações entre diferentes formas de representação.

Raciocínio em tarefas de investigação. A realização de tarefas de investigação contribui para promover, no aluno, o uso de determinados processos característicos da actividade matemática que podem ajudar a compreender as características do seu raciocínio.

A procura de regularidades, realizada a partir da observação directa dos dados ou da sua manipulação (cálculos aritméticos simples entre elementos consecutivos de uma sequência, por exemplo), está presente em quase todas as tarefas e, geralmente, permite ao aluno identificar padrões. As dificuldades na identificação de padrões só surgem quando Carlos não tem em conta, nesse processo, toda a informação disponível. Desta forma, o trabalho seguinte de formulação de conjecturas fica limitado.

Os dados recolhidos sugerem que a actividade de investigação desenvolvida por Carlos não contempla, formalmente, a formulação de questões. De facto, as suas conjecturas, nem sempre explícitas, emergem de forma imediata, quase sempre baseadas em analogias ou na identificação de padrões e recorrendo à experimentação de casos únicos. Estas estratégias nem sempre permitem a determinação das propriedades matemáticas relevantes para o processo de generalização seguinte, ficando este dificultado. Deste modo, o processo de generalização está presente sempre que solicitado mas apresenta-se, algumas vezes, incompleto ou mesmo incorrecto. No entanto, o aluno também é capaz de formular conjecturas com base em conceitos e propriedades matemáticas e, neste caso, apresentam-se geralmente correctas.

O aluno nunca formula várias conjecturas em simultâneo, resultantes da realização diversas explorações ou da assunção de pressupostos diferentes, no sentido de alargar a exploração. No entanto, por diversas vezes, propõe formulações alternativas (ou reformulações), no sentido de melhorar os resultados, permitindo-lhe refinar as conjecturas formuladas. Este processo tem por base as propriedades matemáticas e a análise de figuras geométricas.

O teste de conjecturas surge no trabalho desenvolvido por Carlos com alguma frequência, utilizando para isso, estratégias diversas. Algumas vezes, o teste é realizado através da experimentação de um exemplo único ou de exemplos disponíveis no enunciado e, deste modo, o aluno nem sempre se apercebe de incorrecções ou limitações nas conjecturas formuladas. Há, no entanto, outras vezes, em que a verificação se baseia em representações gráficas e/ou em conceitos e propriedades matemáticas. Nestes casos, o teste das conjecturas acaba por coincidir com o processo da sua justificação.

Carlos tem sempre a preocupação de explicar, detalhadamente, todos os seus raciocínios e mostra facilidade em compreender intuitivamente os argumentos matemáticos que suportam a solução. No entanto, os argumentos que utiliza são maioritariamente visuais e as explicações são apresentadas de uma forma descritiva e numa linguagem natural. Como o aluno parece não sentir a necessidade de justificar as conjecturas que lhe parecem verdadeiras, o processo de justificação não é explícito nem intencional e tem uma presença muito reduzida no seu trabalho. Só na última tarefa é que o aluno parece reconhecer a importância e o significado do processo de justificação de conjecturas pois é visível o seu cuidado em justificar os raciocínios recorrendo a conceitos e propriedades matemáticas, além das figuras geométricas. Apesar disso, a argumentação mantém-se descritiva com recurso à linguagem natural e o processo de justificação de conjecturas apresenta-se informal.

Raciocínio em problemas. De uma forma geral, Carlos tem facilidade em identificar os dados e em compreender a questão dos problemas propostos. Durante esta fase de compreensão, o aluno empenha-se em dar sentido à informação disponível no enunciado do problema, exprimindo-a noutros termos, usando uma linguagem natural. À medida que faz isto, espontaneamente recorre aos seus conhecimentos (conceitos, propriedades, algoritmos) para interpretar a situação problemática.

Na fase de exploração e planificação, o aluno começa por propor uma estratégia de resolução única e, na maioria das vezes, não imagina o desenvolvimento do processo de resolução para avaliar a viabilidade da estratégia proposta ou a sua eficiência antes de a executar. Durante esta fase, Carlos mostra ter os conhecimentos necessários (sobre conceitos matemáticos e procedimentos de rotina) e algum potencial heurístico para seleccionar, de forma adequada a cada problema, as heurísticas que podem conduzir à solução pretendida. As estratégias identificadas incluem, a reformulação do problema ou a sua decomposição em sub-problemas, organizar e reduzir dados e torná-los manipuláveis, a análise exaustiva de casos para investigar valores limite, substituição de incógnitas ou manipulação algébrica para simplificar expressões e a representação dos dados em tabelas ou gráficos para sistematizar e auxiliar os cálculos.

Durante a fase de execução, o aluno empenha-se, predominantemente, na realização de cálculos de forma a cumprir o plano proposto. No entanto, nem sempre apresenta registos detalhados do seu trabalho (cálculos e resultados intermédios), sobretudo quando utiliza as capacidades da máquina de calcular para encontrar a solução. Nesta fase, o aluno evidencia ter os conhecimentos matemáticos necessários para implementar as estratégias planeadas e resolver os problemas de forma correcta embora nem sempre opte pelos mais recentes. As estratégias identificadas nesta fase são variadas e incluem a manipulação algébrica, a realização de cálculos simples, a utilização de definições, a identificação de padrões e a utilização da representação gráfica e das potencialidades da máquina de calcular para encontrar soluções.

Quando, nesta fase de execução, Carlos não encontra (entre os seus recursos) as ferramentas necessárias para implementar a estratégia planeada ou quando esta não permite obter resultados (encontrar a solução), o aluno volta atrás à fase de planificação, selecciona uma nova estratégia e recomeça nova fase de execução. Assim, a avaliação das estratégias planeadas só ocorre depois do aluno entrar na fase de execução do processo de resolução do problema. Além disso, esta avaliação não contempla a eficiência de estratégias que fica, deste modo, comprometida.

Quando dá por terminada a resolução do problema, depois de obter uma solução, Carlos tem o cuidado de interpretar e explicar os resultados obtidos, dentro do seu contexto, embora não verifique a correcção dos seus cálculos e resultados. Deste modo, não deixa vestígios do uso de estratégias de verificação nem de raciocínio lógico de justificação, possivelmente porque tem confiança nos seus cálculos e processos de resolução que conduzem, de forma geral, a soluções que se ajustam com o esperado. Carlos também não revela preocupação em procurar outras estratégias alternativas às que apresenta, talvez consequência da já referida falta de reflexão sobre a eficiência do processo de resolução. No entanto, no decorrer das entrevistas, o aluno é capaz de referir outras maneiras para chegar ao mesmo resultado.

Aprendizagem em Análise Numérica. Os resultados apresentados evidenciam também as potencialidades das tarefas de investigação para a aprendizagem significativa de conceitos e procedimentos da Análise Numérica. A sua realização permite abordar diversos tópicos programáticos desta disciplina e estabelecer ligações entre eles.

Carlos parece ter compreendido diversos conceitos e procedimentos de base da disciplina pois utiliza-os, de forma correcta, na exploração de todas as tarefas propostas e nos testes de avaliação. Destacam-se os conceitos de valor aproximado e de erro, de intervalo e respectiva aritmética ou os métodos de interpolação polinomial e ajuste de curvas. Algumas vezes, o aluno também é capaz de mobilizar os conhecimentos recentemente abordados para os aplicar, de forma adequada, a diferentes situações. Deste modo, revela compreender a utilidade e a aplicabilidade destes conceitos e procedimentos.

Os resultados mostram, ainda, que durante a exploração das tarefas propostas o aluno constrói, de forma intuitiva, alguns conceitos e procedimentos, contemplados no programa da disciplina mas ainda não trabalhados nas aulas, como é o caso do método dos mínimos quadrados. Deste modo, o aluno desempenha um papel importante no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina.

A aquisição de conhecimentos ligados aos tópicos programáticos da disciplina, não esgota o processo de aprendizagem do aluno. Carlos salienta que a realização das tarefas, através dos relatórios escritos e das discussões em sala de aula (quer em grande grupo, quer entre os elementos do grupo a que pertence), permite o desenvolvimento da capacidade de comunicação e de formas diferentes de raciocínio, quando o aluno se depara com a existência de diferentes abordagens e estratégias para a sua exploração.

Capítulo 7

O Caso Gonçalo

A análise seguinte foca-se no trabalho desenvolvido por Gonçalo na realização das diferentes tarefas de investigação propostas no decorrer da disciplina de Análise Numérica. Começo por fazer uma breve caracterização do aluno para depois apresentar uma descrição detalhada dos resultados referentes ao seu raciocínio no trabalho com representações, na realização das tarefas de investigação e na resolução de problemas e também uma referência às aprendizagens desenvolvidas. De seguida, tendo em conta as questões do estudo, faço uma síntese desses resultados.

7.1. Apresentação do aluno

Gonçalo frequenta o curso de Engenharia Mecânica e está entre os melhores alunos do curso devido aos resultados escolares (classificações médias/altas) que habitualmente obtém. O seu percurso escolar é, de um modo geral, bem sucedido, quer a Matemática, quer noutras disciplinas, não registando qualquer retenção. Antes de ingressar na Escola Naval o aluno frequenta, no ensino superior, o curso de Química Aplicada, justificando assim a sua preferência pelas disciplinas de Física e Química. Quanto à Matemática, afirma que "sempre me correu bem, não é por gostar ou não gostar, é uma disciplina como as outras" (E5). Também não sente grandes dificuldades na passagem do ensino secundário para o ensino superior uma vez que não encontra diferenças significativas entre as metodologias de ensino e aprendizagem usadas nestes dois níveis de ensino.

É um aluno tímido, calmo e sempre sorridente que nos seus tempos livres gosta de "fazer o que toda a gente gosta de fazer, um pouco de tudo. Desporto, muito, sobretudo atletismo" (E5). Manifesta empenho nas tarefas que lhe são propostas, sobretudo se forem desafiantes e quando trabalha em grupo, é participativo e defende a sua opinião com determinação. Nas aulas tenta perceber "as coisas" para não ter que estudar muito pois não gosta de fazer exercícios nem trabalhos de casa:

> Seja que disciplina for, a melhor coisa a fazer é ir percebendo as coisas ao longo das aulas. Nunca sou pessoa de estudar muito ou estudar muito em cima [das datas dos estes], sou mais de ir percebendo as coisas. Quando isso não acontece, já… Eu não gosto de fazer exercícios. Eu gosto de perceber. (E5)

Esta atitude revela que o aluno tem excesso de confiança nos seus conhecimentos para resolver as questões mais simples, sobretudo a realização de procedimentos e cálculos. Como não os executa, habitualmente, depara-se com algumas dificuldades ao longo do semestre. Ele próprio reconhece que esta sua característica o prejudica e refere que não a altera devido à "preguiça":

> A partir do momento em que percebo (julgo que percebo) já nem sequer gosto de acabar o exercício. Isto prejudica-me nos testes… Pela falta de prática. Porque há muitas coisas que julgo perceber mas quando chego lá… Vou começar a fazer e já tenho que estar a pensar… E isto acontece-me muitas vezes. Ainda não mudei porque há uma coisa chamada preguiça que ainda não ultrapassei. (E5)

Por isso, Gonçalo tem um fraco desempenho no questionário inicial, uma vez que acaba por não responder a grande parte das questões.

7.2. Raciocínio do aluno

No trabalho com representações matemáticas

Tarefa 1. Nesta tarefa, Gonçalo começa por utilizar a linguagem natural para descrever o modo de formação das regras das operações com intervalos:

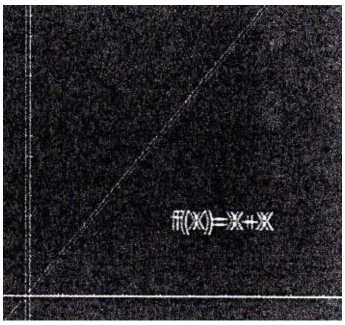
> No caso da soma era fazer a soma coordenada a coordenada porque os dois extremos continham todas as somas. (…) Para a multiplicação e divisão (…) era encontrar a menor multiplicação entre os dois intervalos, a menor de todas as combinações possíveis, e a maior e uma maneira fácil de fazer isso era fazer todas as multiplicações dos extremos destes dois [intervalos]. (E1)

Estas descrições informais são, frequentemente, acompanhadas de notação simbólica quando o aluno, a trabalhar em grupo, tenta formalizar as regras deduzidas numa expressão algébrica:

> O grupo deduziu ainda mais uma regra que consistia em trabalhar com os valores médios dos intervalos e com o raio que eles tinham.
>
> Considerando $[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [c_1, c_2]$, tínhamos $x_{médioa} = (a_1 + a_2)/2$ e $x_{médiob} = (b_1 + b_2)/2$. Constatamos que $x_{médioc} = (c_1 + c_2)/2$ irá ser igual à soma dos valores médios dos intervalos, $x_{médioc} = x_{médioa} + x_{médiob}$ (…). (RT1)

Quando na questão seguinte se pedem as imagens de intervalos de valores reais através de funções, o aluno recorre de imediato à representação gráfica dessas funções e utiliza-a, de forma correcta, quer para encontrar a solução pretendida, quer para confirmar os resultados obtidos através de cálculos que faz e onde aplica as regras deduzidas na alínea anterior. Por exemplo, para calcular a imagem do intervalo X = [2, 7] através da função f(X) = X+X, Gonçalo, em conjunto com os seus colegas de grupo, começa por aplicar a regra da soma de intervalos deduzida na questão anterior mas verifica o resultado através do gráfico:

> Concluímos que a imagem através da função é o intervalo [4, 14] (…). Esta conclusão é corroborada pois a imagem da função (ver gráfico) vai ser o resultado da soma algébrica do intervalo [2, 7].

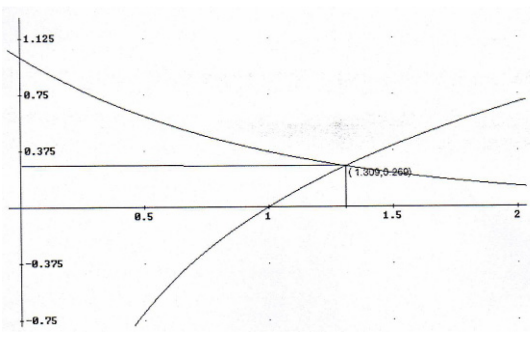


(RT1)

Deste modo, o aluno parece ser capaz de relacionar as representações algébricas e gráficas das funções. Relativamente à função f(X)= 2X a dedução das regras é feita apenas por observação dos seus gráficos, como explica na entrevista: "Ao traçar o gráfico de ambas as funções [refere-se também a f(X) = X+X], verificamos que se trata do mesmo gráfico, tendo então a mesma imagem ao aplicar qualquer intervalo" (E1). Para a função $f(X) = X^2$ ainda refere: "Primariamente analisamos o gráfico da função e concluímos que não podíamos generalizar apenas numa expressão o resultado pretendido. Por isso dividimos a função nos vários tipos de intervalos possíveis e obtivemos as várias opções (…)" (E1). A utilização da representação gráfica, neste caso, ajuda a compreensão uma vez que facilita a identificação de propriedades das funções (por exemplo, a monotonia) que são fundamentais para o aluno obter a resposta correcta. Também parece ter facilidade em utilizar a máquina de calcular e as suas potencialidades para desenhar gráficos de funções e em interpretá-los de forma correcta, extraindo a informação adequada para a resposta.

Assim, nesta tarefa, o aluno utiliza a linguagem natural para descrever os seus raciocínios e complementa-a com alguma notação simbólica quando é solicitado a generalizar regras. No entanto, opta pela representação gráfica, com frequência, para obter soluções e confirmar resultados e revela facilidade em relacionar diferentes representações.

Tarefa 2. A primeira opção de Gonçalo, durante o trabalho em grupo, para tentar resolver a equação não linear é a utilização de manipulação algébrica mas, como explica na entrevista, esta estratégia não permite obter uma solução: "Na primeira tentativa, tentámos resolver como antigamente [refere-se à resolução analítica através de manipulação algébrica, como fazia para as outras equações] mas não conseguimos chegar a nenhum valor" (E2). Esta opção parece estar relacionada com a experiência escolar do aluno, uma vez que a resolução de equações se faz, maioritariamente, através de manipulação algébrica. Ao verificar que esta estratégia não resulta, o aluno, rapidamente, opta por outra abordagem e tenta a resolução aproximada da equação a partir da representação gráfica, auxiliado pela máquina de calcular. Tal como na tarefa anterior, mostra competência no seu uso e prepara, através de manipulação algébrica, a informação necessária para introduzir na máquina de calcular de modo a obter o gráfico a partir do qual obtém a solução e que apresenta no relatório de grupo:



(RT2)

Durante a entrevista, o aluno interpreta correctamente o gráfico apresentado e descreve o processo de obtenção da solução, usando a linguagem natural:

> Ao igualarmos a nossa função $f(x) = \ln(x) - e^{-x}$ a zero, temos que $\ln(x) = e^{-x}$. O valor que procuramos trata-se do x para o qual as duas funções são iguais. Então fizemos o traçado do gráfico das duas funções para ver qual o valor de x no qual se dava a intersecção. (E2)

Na questão seguinte, durante a realização do trabalho de grupo, o aluno tenta identificar padrões na sequência de intervalos que são apresentados no enunciado. Para isso utiliza símbolos de mais e menos para indicar as alterações ocorridas na referida sequência e organiza a informação em forma de tabela:

> Tentámos encontrar um padrão e perceber o que estava a acontecer em concreto de intervalo para intervalo
>
> | | |
> |---|---|
> | 1 – [1.000 2.000] | - |
> | 2 – [1.000 1.500] | + |
> | 3 – [1.250 1.500] | - |
> | 4 – [1.250 1.375] | - |
> | (…) | |
>
> Observamos que quando ocorriam alterações no extremo superior, se tratava deste ser reduzido, no caso do extremo inferior, se ocorresse alteração, estes seriam aumentados. (RT2)

Depois de identificado o padrão, utiliza a linguagem natural para descrever o modo de formação dos elementos da sequência apresentada, como explica depois, na entrevista: "Apercebemo-nos que o valor da amplitude do intervalo seguinte é sempre metade da amplitude do intervalo anterior. Depois apercebemo-nos que o valor a somar ou a subtrair era sempre metade do valor do intervalo anterior" (E2). Para a generalização da regra, e uma vez que a mesma não pode ser representada por uma expressão algébrica única, os alunos, a trabalhar em grupo, constroem um algoritmo que traduz o modo de formação dos intervalos, usando um misto de linguagem natural e simbólica:

> Como regra geral e tomando em conta o modo como chegamos ao intervalo seguinte, temos o intervalo [a, b] com $v_{méd} = (a+b)/2$. Fazemos os seguintes passos:

1.º Encontrar o valor médio ($v_{méd}$)

$v_{méd} = (a+b)/2$

2.º Encontrar $f(v_{méd})$

Se $f(v_{méd}) > 0$ então ficamos com o intervalo seguinte $[a, v_{méd}]$

Se $f(v_{méd}) < 0$ então ficamos com o intervalo seguinte $[v_{méd}, b]$

(RT2)

Na última questão desta tarefa, e apesar de terem identificado o problema como sendo a resolução de uma equação não linear, os alunos ainda tentam resolvê-la, sem sucesso, através de manipulação algébrica. No entanto, não despendem muito tempo nesta estratégia. Não optam pela representação gráfica, que seria a mais eficiente, mas, em vez disso, utilizam, de forma correcta o algoritmo do método numérico de resolução deduzido na questão anterior e apresentam os cálculos organizados numa tabela:

Efectuamos os seguintes cálculos para nos aproximarmos do valor de t:

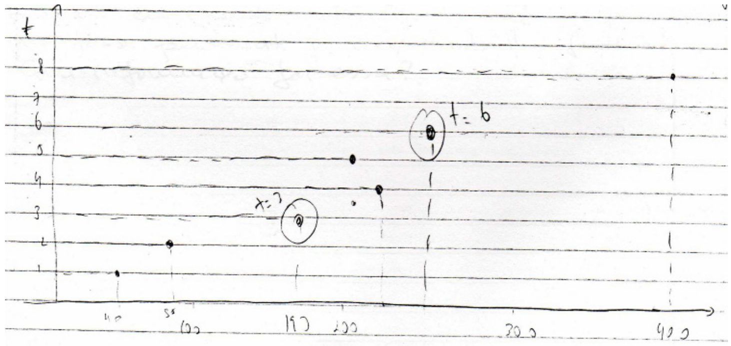
[25.000,59.702]	$\Delta x/2 = 17.351$	$t_{med} = 42.351$
[25.000,42.351]	$\Delta x/2 = 8.338$	$t_{med} = 29.336$
[25.000,33.675]	$\Delta x/2 = 2.169$	$t_{med} = 27.169$
[25.000,29.338]	$\Delta x/2 = 1.085$	$t_{med} = 26.085$
(…)	(…)	(…)

(RT2)

A análise do trabalho de Gonçalo, nesta tarefa, revela que o aluno usa a manipulação algébrica para encontrar uma solução mas opta imediatamente pela representação gráfica ou pela utilização de algoritmos, que constrói durante as suas explorações, quando essa estratégia não lhe permite obter soluções. Em qualquer das situações, o aluno utiliza a linguagem natural para descrever os seus raciocínios e complementa-a com notação simbólica quando generaliza regras e procedimentos. Também utiliza tabelas para organizar informação de forma a facilitar a sua compreensão (a identificação de padrões) e para apresentar cálculos e resultados.

Tarefa 3. Os alunos, no seu trabalho de grupo, começam por construir vários gráficos para representarem os dados das tabelas e, assim, revelam ser capazes de estabelecer uma relação entre estas duas representações:

Considerando o tempo t como os nós da interpolação e os valores da população de bactérias como os valores nodais, podemos representar os dados



(RT3)

Esta representação gráfica dos dados pode auxiliar na compreensão do problema e na escolha do melhor método de interpolação. No entanto, Gonçalo explica na entrevista que o gráfico não é utilizado na exploração da questão, uma vez que optam por aplicar os métodos numéricos de interpolação, abordados recentemente nas aulas, sem ter em conta o comportamento dos dados: "[O gráfico] foi para mostrar que podia ser uma função, que não tinha pontos… Para o mesmo objecto não tinha várias imagens" (E3). Como a aplicação desses métodos requer a realização de bastantes cálculos, alguns dos quais de forma iterativa, o aluno recorre a tabelas para os apresentar de forma organizada e, ao mesmo tempo, aproveita esta representação e a organização que elas permitem para facilitar a realização desses mesmos cálculos, como apresenta no seu trabalho de grupo:

	n_0	$f(n_0)$	1ª diferença	2ª diferença	3ª diferença
n_0	2	90	50	25	-2,5
n_1	3	140	100	10	
n_2	5	240	150		
n_3	8	390	–		

$$p_3(n) = f(n_0) + \Delta^1 (n-n_0) + \Delta^2 (n-n_0)(n-n_1) + \Delta^3 (n-n_0)(n-n_1)(n-n_2)$$

$$p_3(4) = 90 + 50.(4-2) + 25(4-2)(4-3) + (-2,5)(4-2)(4-3)(4-5)$$

$$p_3(4) = 245$$

(RT3)

A escolha desta representação parece estar relacionada com a familiarização de procedimentos, uma vez que a forma de tabela utilizada pelo aluno (e observada também no trabalho de todos os outros alunos) é idêntica à que é apresentada nos manuais da disciplina e na resolução de exercícios de aplicação destes métodos de interpolação, na sala de aula.

Na questão seguinte desta tarefa, Gonçalo e os seus colegas de grupo tentam determinar o melhor modelo matemático que representa um conjunto de dados. As suas decisões baseiam-se em cálculos, que organizam e apresentam em tabelas de forma a permitir uma rápida comparação de valores, através de simples observação:

modelo a)

t (horas)	1	2	3	4	5	6	7
p ($\times 10^5$)	593	700	971	1406	2005	2768	3695
erro	43	50	29	6	5	68	5

modelo b)

t (horas)	1	2	3	4	5	6	7
p ($\times 10^5$)	182	700	1218	1736	2254	2772	3290
erro	368	50	218	336	254	72	460

(…) (RT3)

Na entrevista, o aluno explica: "Criámos uma tabela com as mesmas horas e substituímos os valores destas em cada modelo e calculamos o erro… Não perdemos muito tempo (…) porque é tão claro… Era só comparar os valores e ver quais são os que têm maiores diferenças" (E3). Na última questão desta tarefa, quando os alunos trabalham em grupo, voltam a usar tabelas para os auxiliar na realização de cálculos e para apresentar essa informação de forma sistematizada.

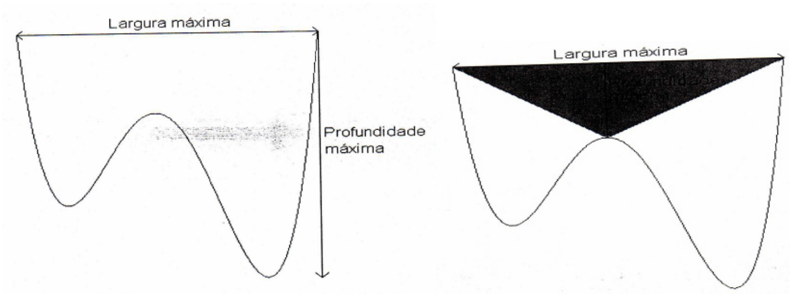
Vamos calcular as diferenças divididas para o método de Newton:

x	**y**	**1ª dd**	**2ªdd**	**3ªdd**
110	2175	4,2	1,6	0,068
115	2196	20,2	2,9	
120	2297	4,3		
130	2390			

(RT3)

A tabela é, assim, a representação predominante nesta tarefa. Gonçalo utiliza-a para apresentar e organizar dados e para facilitar os cálculos que dominam o seu trabalho de exploração. Embora a representação gráfica apareça no trabalho do aluno, a sua presença é muito reduzida e acaba por não ser usada durante a exploração desta tarefa.

Tarefa 4. Na exploração desta tarefa, em grupo, os alunos começam por escolher figuras geométricas bastante elementares como base para o cálculo aproximado da área da figura proposta, como por exemplo:



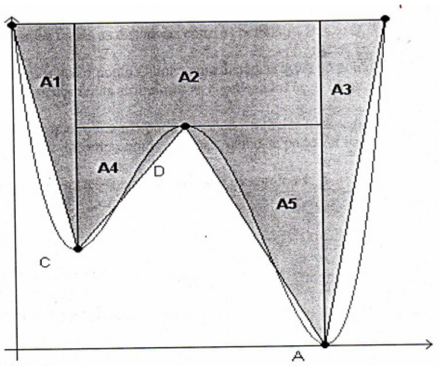
(RT4)

Gonçalo explica, durante a entrevista, que utilizam estas figuras para desenvolver os seus raciocínios e descreve-as detalhadamente, em linguagem natural:

> A nossa área máxima corresponde à área do rectângulo de comprimento 30m (largura máxima) e altura 15m (profundidade máxima). (…) Podíamos obter um valor para a área mínima calculando a área do triângulo que se encontra a sombreado na figura. (E4)

A trabalhar em grupo, os alunos continuam a explorar diferentes estratégias geométricas, cada vez mais complexas, decompondo a figura inicial em várias figuras elementares (rectângulos e triângulos). Para isso, recorrem novamente a figuras que os auxiliam a tomar decisões no processo de decomposição da figura:

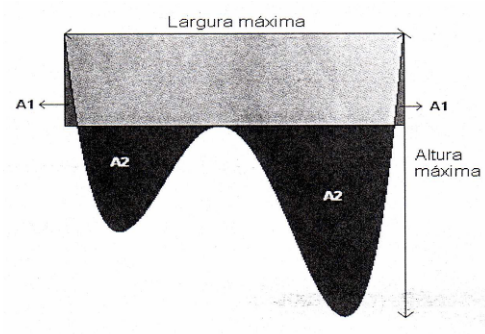
> Partindo novamente da análise visual à imagem e dos dados disponíveis resolvemos tentar dividir a imagem em figuras regulares e calcular a área destas. Fizemos a seguinte divisão da figura:



(RT4)

As figuras servem, também, para justificar alguns pressupostos que os alunos assumem, durante o trabalho de grupo, quando optam por determinada estratégia:

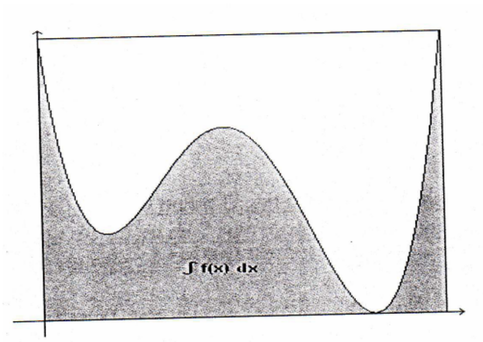
> Consideramos esta uma área aproximada da figura, pois pela análise visual assumimos que A1 ≈ A2



(RT4)

Já na entrevista, Gonçalo mobiliza os recentes conhecimentos de ajuste de curvas e recorre às potencialidades da máquina de calcular para, de forma mais eficiente e exacta, encontrar uma solução. Mostra o gráfico da função ajustada através da máquina de calcular para explicar o seu raciocínio e descreve-o, também em linguagem natural:

> Usamos a calculadora para fazer o ajuste dos pontos através de uma função. Podemos usar um polinómio do 4.º grau porque, ao traçarmos uma linha horizontal, o máximo de intersecções com a função é de 4, que corresponderia ao n.º máximo de zeros.



(E4)

Neste caso o gráfico serve para o aluno analisar o comportamento da função e, com base nesse comportamento e nas propriedades dos polinómios que conhece, seleccionar a melhor função a ajustar.

As figuras geométricas são o tipo de representação que domina o trabalho desenvolvido por Gonçalo, nesta tarefa. O aluno utiliza-as para visualizar as suas diferentes explorações, para mostrar os seus raciocínios e para justificá-los. Embora com uma presença reduzida, a representação gráfica também é utilizada, nesta tarefa, para fundamentar as decisões do aluno sobre as estratégias a usar na obtenção de soluções. As representações referidas são sempre acompanhadas de descrições, em linguagem natural, que o aluno usa para descrever e explicar os seus raciocínios.

Na realização de tarefas de investigação

Tarefa 1. Na aula, o grupo de Gonçalo começa a exploração da tarefa procurando regularidades nos exemplos que são fornecidos no enunciado, com aplicações da regra da adição de intervalos de valores reais. Através da observação desses exemplos, os alunos identificam o padrão que está subjacente à sua construção e formulam, correctamente, uma conjectura para a adição de intervalos: "Chegamos a essa conclusão efectuando a soma dos extremos inferiores e dos extremos superiores, partindo dos exemplos apresentados" (RT1). No entanto, quando se pede a generalização desse resultado, o grupo realiza várias explorações e propõe diferentes conjecturas, embora mais trabalhosas e por isso menos eficientes que a primeira, como é o caso do exemplo seguinte:

> Somando as diferenças de ambos os intervalos, teríamos a amplitude do intervalo soma, ou seja, $\Delta a = (a_2 - a_1)$, $\Delta b = (b_2 - b_1)$ então $\Delta a + \Delta b = \Delta c$. Então, para encontrarmos o intervalo final teríamos que ter apenas um dos extremos. Para isso faremos a soma de a com b e tínhamos $[a_1+b_1, a_1+b_1+ \Delta c]$. (RT1)

Para a subtracção, o grupo formula uma conjectura, correctamente, por analogia com a regra da adição mas modifica-a tendo em conta as propriedades dos números e das operações:

> Para a subtracção também funcionavam todas as estratégias. Verifica-se que o primeiro método aplicado para a soma apenas é aceite se transformarmos a subtracção numa soma, isto é, $a - b = a + (-b)$. Trocaríamos b_1 e b_2 de extremos e assim já se podia aplicar a soma de extremos a extremo. (RT1)

Gonçalo explica, durante a entrevista, que durante o trabalho de grupo recorre à experimentação de alguns casos para validar as conjecturas formuladas para a regra da adição:

> Verificamos que de facto, todas as três regras funcionam em todos os intervalos reais após efectuar a experiência em diferentes intervalos.

> Tendo em conta que funcionou para os intervalos experimentados, aceitamos como verdadeira para todos. (E1)

No entanto, quando as conjecturas são formuladas utilizando um processo dedutivo, baseado nas propriedades dos números já conhecidas, como é o caso da subtracção, os alunos já não sentem a necessidade de verificar a sua validade, talvez por considerarem suficiente a justificação dada.

Gonçalo parece compreender o significado de um intervalo resultante de uma operação aritmética entre dois intervalos de valores reais, pois explica na entrevista, relativamente à soma de intervalos:

> Antes de começarmos a tarefa eu nunca tinha visto a soma de intervalos e fiquei mesmo sem perceber do que é que se tratava. Mas depois percebi que considerando $[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [c_1, c_2]$, tínhamos que qualquer valor compreendido entre a_1 e a_2, somado com qualquer valor entre b_1 e b_2, estaria compreendido no intervalo c. (E1)

A compreensão deste conceito é notória, também, quando o aluno o utiliza na formulação de conjecturas para a multiplicação e divisão:

> Para a multiplicação e divisão apercebi-me, desde logo, que nenhuma das estratégias aplicadas [nas outras operações] funcionava. Pensámos foi no caso dos extremos. (…). Então basicamente era tentar encontrar o extremo mínimo, era encontrar a menor multiplicação entre os dois intervalos, a menor de todas as combinações possíveis, e a maior. E uma maneira fácil de fazer isso era fazer todas as multiplicações dos extremos destes dois porque iam conter o maior e o menor quer no caso da multiplicação, quer da divisão. (E1)

Mais uma vez, estas conjecturas são consideradas válidas para todos os intervalos de valores reais recorrendo à experimentação de alguns casos, aparentemente pouco sistemática e bastante incompleta, conforme refere Gonçalo durante a entrevista, embora não haja qualquer indicação nem desenvolvimento deste processo no trabalho escrito dos alunos:

> Depois de termos a ideia experimentámos uma vez ou duas e verificamos. Fomos confirmar, não foi preciso estar a fazer muitos cálculos para ter a ideia… Estive a colocar também na recta real. Colocava um intervalo, colocava outro intervalo, colocava o intervalo que pensava já ser o que continha todas as multiplicações possíveis entre um e o outro e depois experimentei com vários valores e continha sempre. (E1)

Gonçalo considera a segunda questão "mais fácil" e justifica: "Substituímos directamente o 2 e o 7 e ficámos com uma soma de intervalos e já sabíamos como fazer" (E1). O aluno aplica directamente a regra da adição, deduzida na questão anterior, para calcular a imagem de um intervalo X através das funções f(X) = X+X e f(X) = 2X, que considera terem expressões equivalentes: "Na alínea seguinte substitui-se o X pelas coordenadas e faz-se a distributiva logo, ou seja, o 2 vezes coordenada a coordenada. E verificamos dar o mesmo valor que esta função [f(X) = X+X]" (E1). Esta equivalência e os resultados obtidos são confirmados através da representação gráfica das funções referidas, que o aluno faz utilizando a máquina de calcular.

No caso da função dada por $f(X) = X^2$, Gonçalo explica, durante a entrevista, que começa por representar graficamente a função cuja análise lhe permite concluir:

> A imagem de um intervalo X = [a, b] aleatório vai dar um intervalo de imagens e este vai depender do valor das coordenadas. Por exemplo se uma era positiva, se era negativa, se o módulo de uma era maior que outra… Não podíamos generalizar [a regra] em apenas uma expressão. Teríamos que 'dividir' a função nos vários intervalos possíveis. (E1)

É a partir desta observação que os alunos desenvolvem o seu trabalho em grupo. Utilizam a representação gráfica da função quadrática para procurar regularidades, com vista à formulação de uma conjectura sobre a imagem de um intervalo através desta função. Esta representação gráfica permite-lhes identificar todas as combinações possíveis que os valores dos extremos dos intervalos podem tomar e, para cada caso, formular uma conjectura, utilizando só um exemplo e baseados apenas nas imagens desses extremos:

Se $a<0$, $b<0$, $f([a, b]) = [b^2,a^2]$ Exemplo: $[a, b] = [-4,-2]$
$f([-4,-2]) = [4,16]$

Se $a<0$, $b>0$, $|a|>|b|$, $f([a, b]) = [b^2, a^2]$ Exemplo: $[a, b] = [-4,2]$
$f([-4,2]) = [4,16]$

Se $a<0$, $b>0$, $|a|<|b|$, $f([a, b]) = [a^2, b^2]$ Exemplo: $[a, b] = [-3,6]$
$f([3,6]) = [9,36]$

Se $a>0$, $b>0$, $f([a, b]) = [a^2, b^2]$ Exemplo: $[a, b] = [2,4]$
$f([2,4])= [4,16]$

Se $a = 0$, $b>0$, $f([a, b]) = [0, b^2]$ Exemplo: $[a, b] = [0,2]$
$f([0,2])= [0,4]$

Se a<0, b = 0, f([a, b]) = [0, a^2] Exemplo: [a, b] = [-2,0]
f([0,2])= [0,4] (RT1)

No caso em que a função não é monótona, a imagem do intervalo não depende só dos valores dos seus extremos, é necessário uma análise do gráfico da função ao longo de todo o intervalo, que os alunos não fazem e, por isso, não identificam a incorrecção dessa conjectura. Também não tentam refinar as conjecturas, embora o processo fosse possível, por exemplo, agrupando algumas das várias expressões obtidas e diminuindo, assim, o número dos casos a considerar.

O processo de justificação destas conjecturas está ausente do trabalho dos alunos. Mesmo quando questionado, explicitamente, sobre a justificação das conjecturas, Gonçalo não é capaz de identificar as razões que estão na base das diferenças entre os casos considerados e responde:

> Isso tem a ver com módulos, era… Como eram tantas situações às vezes já confundia… Quando tínhamos, por exemplo… Os padrões tinham sempre a ver com a comparação entre as coordenadas, se eram positivas ou negativas. Não dava para generalizar, era mesmo caso a caso. (E1)

Este aspecto é ainda mais notório em relação à função f(X) = e^X, em que Gonçalo explica que volta a basear-se na análise do gráfico para formular uma regra e utiliza os mesmos casos anteriores quando, desta vez, é possível generalizá-la numa expressão única, uma vez que a função é monótona: “Como também é impossível definir todos os intervalos por uma única expressão, dividimos o gráfico da função em várias expressões” (E1).

Ao longo da exploração desta tarefa, Gonçalo formula várias conjecturas baseadas em analogias, na identificação de padrões, na análise gráfica ou em processos dedutivos fundamentados em propriedades matemáticas. O aluno tem, ainda, a preocupação de validar essas conjecturas recorrendo à experimentação de alguns casos ou comparando os resultados obtidos a partir de diferentes estratégias. No entanto, não é visível qualquer tentativa para as justificar.

Tarefa 2. Nesta tarefa, durante a realização do trabalho de grupo, os alunos começam por observar a sequência de intervalos consecutivos dados no enunciado e tentam “encontrar um padrão e perceber o que estava a acontecer em concreto de intervalo para intervalo” (RT2). Uma vez que não usam toda a informação que está disponível, deparam-se com algumas dificuldades neste processo de procura de regularidades, como referem: "Ficámos um pouco desmotivados ao início pois não estávamos a conseguir encontrar nenhuma relação que nos parecesse válida" (RT2). Gonçalo propõe a identificação, em separado, do padrão relativo à diminuição da amplitude dos intervalos da sequência e ao modo de formação dos respectivos extremos. Assim, surge uma primeira conjectura baseada na identificação, correcta, do padrão de diminuição da amplitude dos intervalos, como explica mais tarde, na entrevista: "Apercebemo-nos de imediato que os intervalos estavam a tornar-se cada vez mais pequenos, ou seja, o valor da amplitude do intervalo seguinte é sempre metade da amplitude do intervalo anterior. Sendo que isto acontece em todos os intervalos" (E2).

A escolha de um critério de decisão sobre o extremo do intervalo a reduzir continua a levantar algumas dúvidas, uma vez que os alunos, durante o trabalho de grupo, não conseguem identificar nenhuma regularidade apenas por observação: "Observamos que quando ocorrem alterações no extremo superior, se tratava de este ser reduzido, no caso do extremo inferior, se ocorresse alterações, estes seriam aumentados. Faltava agora perceber quando é que se somava ou se subtraía" (RT2). Só quando se baseiam nos seus conhecimentos sobre funções é que os alunos identificam a regularidade que falta para poderem fazer uma descrição completa do modo de formação dos intervalos da sequência dada, permitindo-lhes responder ao que é pedido, como explica Gonçalo na entrevista: "Como tínhamos como regra que o zero da função se encontra dentro do intervalo, o que fazemos é desprezar de um intervalo para o seguinte a metade que não contém o nosso zero" (E2). Ainda durante a entrevista, o aluno explica algumas das tentativas inconclusivas que faz, baseadas em sequências numéricas e simbólicas, para formular conjecturas sobre a formação dos extremos dos intervalos da sequência dada. Por exemplo, constrói um esquema de contagem do número de vezes que cada extremo se mantém constante ou se altera mas apercebe-se que está incorrecto quando testa a conjectura considerando as condições dadas no enunciado:

> Como no intervalo 2 estava a ser somado, nos intervalos 3 e 4 estavam a ser subtraídos, no intervalo 5 e 6 estava novamente a ser somado, logo pensei que tínhamos a seguinte sequência (…)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-

> Após recordar que a raiz de f estava contida no intervalo, apercebi-me imediatamente que o método estava incorrecto. (E2)

Durante o trabalho de grupo, os alunos verificam a validade da regra de formação, procedendo à sua experimentação apenas para os elementos da sequência apresentada no enunciado. A generalização desta regra reflecte, em grande parte, o trabalho de exploração que os alunos realizam e resulta das várias formulações que vão parcialmente encontrando. Os alunos apresentam a lei de formação dos intervalos na forma algorítmica, em que os elementos da sequência surgem por recorrência e, de forma intuitiva, constroem o método numérico da bissecção para a resolução de equações não lineares:

> Como regra geral e tomando em conta o modo como chegamos ao intervalo seguinte, temos o intervalo [a, b] com $v_{méd} = (a+b)/2$.
>
> Fazemos os seguintes passos:
>
> 1.º Encontrar o valor médio ($v_{méd}$)
>
> $v_{méd} = (a+b)/2$
>
> 2.º Encontrar $f(v_{méd})$
>
> Se $f(v_{méd})>0$ então ficamos com o intervalo seguinte $[a, v_{méd}]$
>
> Se $f(v_{méd})<0$ então ficamos com o intervalo seguinte $[v_{méd},b]$ (RT2)

O processo de justificação da regra só aparece durante a entrevista quando Gonçalo faz uma descrição, em linguagem natural, do modo de formação dos intervalos da sequência com base em algumas propriedades e teoremas matemáticos seus conhecidos, nomeadamente o Teorema de Bolzano e os seus corolários:

> Como a função é contínua, e como $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, apenas tínhamos que manter os extremos com estes sinais para que o próximo intervalo contivesse também o zero. Sendo $v_{méd}$ sempre extremo, bastava ver o sinal de $f(v_{méd})$. (E2)

Quando solicitado a encontrar a ordem correspondente a um determinado elemento da sequência, Gonçalo compreende que a relação pedida só depende da amplitude do intervalo e, por isso, não precisa de usar o algoritmo anterior. No entanto, não tenta formular uma regra geral que expresse essa relação e, em vez disso, divide sucessivamente por dois a amplitude do intervalo inicial até encontrar uma amplitude inferior à pedida, registando todos os valores da referida sequência. Esta estratégia é claramente desadequada para encontrar intervalos com uma ordem elevada, embora o aluno, durante a entrevista, revele ter esse conhecimento e assuma que a opção tomada é reflectida (E2):

> Gonçalo: Se fossem 50 intervalos isso já nos obrigaria a encontrar qualquer regra. Agora assim…
>
> Prof.ª: Mas não sabia que eram 12 intervalos…
>
> Gonçalo: Mas para este valor [amplitude do intervalo dado] e como passava de metade para metade de amplitude, não podiam ser muitos intervalos.

Aparentemente, o aluno não vê inconveniente na utilização desta estratégia uma vez que, neste caso particular, não implica um grande esforço de cálculo na obtenção da solução. No entanto, reconhece a existência de outras estratégias mais eficientes para aplicar noutras situações numericamente mais exigentes.

Gonçalo, nesta tarefa, formula diversas conjecturas, maioritariamente baseadas na identificação de padrões a partir da observação de sequências numéricas e/ou simbólicas. Depois de testadas, geralmente com base na experimentação de alguns casos, essas conjecturas são generalizadas e apresentadas em forma de algoritmo. Além disso, já são notórias algumas tentativas de as justificar, recorrendo a teoremas matemáticos.

Tarefa 3. Na primeira questão desta tarefa, são fornecidas três tabelas de dados apresentando diferentes padrões de comportamento, com valores em falta, que é necessário preencher. Os alunos começam por observar os dados disponíveis e conjecturar que eles representam elementos de funções, verificando-o através da observação dos gráficos que constroem com os dados fornecidos nas tabelas. Depois de confirmarem a sua conjectura, os alunos aplicam os métodos de interpolação polinomial já conhecidos e constroem modelos matemáticos que representem essas funções para, dessa forma, encontrar os valores em falta. No entanto, não têm em conta toda a informação disponível. Por exemplo, como a análise inicial que os alunos fazem dos gráficos não contempla a identificação de padrões no comportamento dos dados, este não é considerado na formulação das conjecturas seguintes sobre esses modelos, com explica Gonçalo, na entrevista: “[o objectivo é] mostrar que podia ser uma função, que não tinha pontos… Para o mesmo objecto não tinha várias imagens” (E3). Assim, a escolha do grau do polinómio a construir baseia-se em propriedades conhecidas dos polinómios e na ideia, esta nem sempre correcta, de que quanto maior o grau do polinómio a construir, melhor a aproximação aos dados e menor o erro. O aluno ainda justifica a opção tomada: "Usámos 4 pontos porque era o que havia. Aliás, a ideia que eu tinha é que quantos mais pontos usássemos mais…" (E3). A opção pelo método de interpolação polinomial de Newton com diferenças divididas é reflectida e também tem por base os conhecimentos recentemente abordados, como justifica: "Os nós não estavam todos à mesma distância" (E3). O aluno considera que os polinómios construídos são adequados para representar os dados e calcular os valores em falta mas não faz qualquer verificação, possivelmente porque acredita nas escolhas fundamentadas que faz. Deste modo, não identifica algumas incoerências nos valores interpolados nem os erros cometidos, apesar de ser possível fazê-lo apenas com uma simples análise dos resultados.

Na exploração da questão seguinte, os alunos têm que encontrar um critério para seleccionar, entre três modelos matemáticos conhecidos, o que descreve melhor o conjunto de dados disponíveis no enunciado. No trabalho em grupo, os alunos começam por calcular as imagens dos valores fornecidos, através das três funções propostas e apresentam toda a informação numa tabela. Complementam a tabela com os cálculos relativos às diferenças entre os dados e as respectivas imagens obtidas para cada um dos modelos, as quais denominam por 'erros do modelo', baseados no seu recente conceito de erro: "Para determinação do melhor modelo criámos uma tabela com as mesmas horas e substituímos o valor destas em cada modelo e calculámos o erro relativamente ao local dado" (RT3). Os alunos conjecturam, então, que o 'melhor' modelo é o que tem menores erros no geral, ou seja, aquele cujo total das diferenças calculadas (afastamento entre os valores dos modelos propostos e os dados fornecidos) é menor. No entanto, no seu trabalho, os alunos não chegam a calcular o total das diferenças e escolhem o modelo comparando os erros apenas com base na observação, como explica Gonçalo na entrevista: "Não perdemos muito tempo com isso porque é tão claro, tão… Era só comparar os valores e ver quais são os que têm as maiores diferenças" (E3). Embora o aluno não justifique o critério de selecção que utiliza, parece claro que valoriza e tenta minimizar, correctamente, a totalidade dos erros em relação aos afastamentos individuais. Este critério, construído de forma intuitiva, está na base do método dos mínimos quadrados, cuja complexidade é reconhecida, a avaliar pelas dificuldades que os alunos habitualmente demonstram na sua compreensão. A formulação desta conjectura parece, assim, facilitar essa compreensão e, consequentemente, a aprendizagem significativa do método.

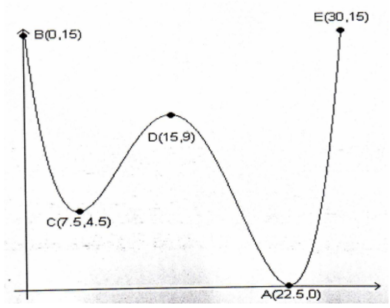
Nesta tarefa, Gonçalo formula as suas conjecturas com base na observação dos dados e em propriedades matemáticas. Quando, por vezes, parte de premissas erradas ou não tem em conta toda a informação disponível, as conjecturas apresentam incorrecções que o aluno não identifica porque nem sempre as testa. O teste de conjecturas, se presente, é feito graficamente. O processo de justificação também tem uma presença reduzida mas, quando realizado tem por base propriedades matemáticas.

Tarefa 4. Nesta tarefa, o grupo faz várias explorações, de forma sistematizada e, recorrendo a figuras geométricas, formula diferentes conjecturas sobre o valor aproximado da área da figura representada no enunciado. Na primeira exploração, os alunos tentam enquadrar o valor da área da figura entre dois valores, a que chamam máximo e mínimo. Baseiam-se em figuras geométricas, bastante elementares e conjecturam que o máximo corresponde à área do rectângulo cujos lados são os valores máximos de largura e profundidade disponíveis no enunciado:

> Conseguimos obter o valor máximo da área, tendo em conta que a largura máxima é de 30 metros e a profundidade máxima é de 15 metros. (…) Logo a nossa área máxima corresponde à área do rectângulo de comprimento 30 metros (largura máxima) e altura 15 metros (profundidade máxima). (RT4)

Para o valor mínimo, os alunos já usam outra figura elementar e formulam uma nova conjectura: "Podíamos obter um valor para a área mínima calculando a área do triângulo que se encontra a sombreado (…)" (RT4). Durante a entrevista, Gonçalo reconhece que tem várias opções mas explica que deste modo, obtém uma aproximação realista para a área da secção, sem ter que assumir pressupostos e usa, correctamente, os conceitos de valor aproximado e erro para apresentar o resultado com uma notação apropriada: "Ao abordar os dados disponibilizados surgiram várias maneiras para calcular a área de modo aproximado. Desta forma obtemos um intervalo [90, 450] para o valor aproximado da área e podemos então escrever que a área = 270 ± 180 m^2" (E4). O aluno tenta justificar as conjecturas formuladas com base nas figuras que desenha para explicar, também, os seus raciocínios.

A trabalhar em grupo, os alunos continuam a explorar a utilização de outras figuras geométricas, como base para o cálculo da área da figura proposta, no sentido de refinar as conjecturas anteriores e obter uma melhor aproximação dessa área. Por exemplo, decompõem a figura inicial em várias figuras mais pequenas cujas áreas são conhecidas e mais fáceis de calcular (rectângulos e triângulos): "Resolvemos tentar dividir a imagem em figuras regulares e calcular a área destas" (RT4). Ao longo do trabalho dos alunos, estas conjecturas são sempre descritas de uma forma informal e justificadas com base numa análise visual de figuras, como no exemplo seguinte:

> Para contornar este problema [falta de dados] e tendo em conta mais uma vez as aproximações retiradas da observação visual da secção, colocamos a secção num referencial ortonormado:
>
> 
>
>
> As suposições foram as seguintes:
>
> - Consideramos iguais as distâncias entre os pontos A, B, C e D.
>
> - Consideramos que o ponto C tinha distância igual ao ponto A e ao ponto D. (RT4)

Gonçalo refere, na entrevista, que durante a exploração em grupo surgem algumas dificuldades devido à falta de dados necessários para efectuarem os cálculos: "Quando tentamos dividir em formas regulares… Havia sempre qualquer figura, havia sempre qualquer coisa que não era possível calcular a área" (E4). E explica que as ultrapassa formulando conjecturas sobre os valores em falta: "Fizemos suposições que retiram desde logo a certeza nos valores apresentados no referencial, embora nos pareçam suficientemente aproximadas para calcularmos a área da secção" (E4). Ainda durante a entrevista, o aluno alarga a exploração feita nas aulas e formula uma nova conjectura, usando os conhecimentos abordados recentemente: "É possível encontrar uma função que represente a linha que representa o fundo da secção do rio, através de um ajuste aos pontos" (E4). Depois, justifica-a com base na figura dada no enunciado, nas características do método de ajustamento e nas propriedades das funções. Começa por justificar a opção pelo ajuste de curvas:

> Na interpolação, tínhamos a certeza que ia passar nos pontos mas a maneira com a função se ia comportar entre os pontos não tínhamos muito bem a certeza se era a mais certa e assim temos a certeza que mesmo não passando pelos pontos vai ser mais correcto. (E4)

Explica também como selecciona a função a ajustar e utiliza a máquina de calcular para realizar os cálculos e obter o modelo matemático, de forma eficiente: "Decidi usar um polinómio do 4.º grau porque ao traçar uma linha horizontal, o máximo de intersecções com a função é de 4, que corresponde ao número máximo de zeros" (E4).

Na questão seguinte, apesar do enunciado disponibilizar mais um dado, os alunos não alteram as conjecturas formuladas anteriormente, durante o trabalho de grupo, para calcular a área da figura. Na exploração desta questão, os alunos refazem apenas os cálculos onde utilizam um valor aproximado para C. No entanto, os resultados agora obtidos não são analisados nem, de algum modo, relacionados com os anteriores, limitando, assim, o trabalho de exploração das questões seguintes. Como Gonçalo explica, na entrevista, esse facto só permite a assunção de menos pressupostos e, consequentemente, a obtenção de valores mais exactos para os resultados encontrados: "Só com mais esse ponto, continuamos à mesma a fazer o mesmo em tudo. Continuamos praticamente com os mesmos dados para calcular a área da secção, sendo que neste momento temos a certeza da posição de C no referencial" (E4).

Já em relação à última questão, o aluno refere as dificuldades na formulação de conjecturas sobre a quantificação do erro ou a sua variação:

> A área aproximada da secção transversal do rio foi calculada de diversos modos, sendo que apenas num deles nos foi possível quantificar um erro. Isto aconteceu no primeiro método em que calculamos o valor máximo e um valor mínimo dessa área tendo assim um intervalo que contenha o valor verdadeiro da nossa área. O intervalo era então o seguinte: [90, 450]. (E4)

Neste caso, o aluno recorre aos conceitos de erro e valor aproximado como base para obter e quantificar, correctamente, o erro associado ao primeiro resultado encontrado. Nas outras explorações realizadas pelo grupo, a quantificação do erro só é possível por comparação, como reconhece: "Concluímos assim que nos casos em que obtemos apenas uma aproximação do valor da área sem conhecermos o valor da área verdadeira, não conseguimos quantificar o erro" (E4). No entanto, a comparação não tem que ser feita em relação à área verdadeira e o aluno não a tenta fazer entre os resultados obtidos nas várias explorações. Como a quantificação do erro não é feita, a identificação de algum padrão no seu modo de variação fica, assim, comprometida. Gonçalo justifica, deste modo, a ausência de resposta a esta questão: "Como não foram obtidos erros das diferentes áreas aproximadas calculadas, não nos foi possível verificar como é que variava" (E4).

Gonçalo, nesta tarefa, recorre às figuras geométricas como base dos processos de formulação e justificação de conjecturas, bastante frequentes no seu trabalho. O aluno refina, com frequência, as conjecturas formuladas e que são depois justificadas, também com base em propriedades matemáticas.

Na resolução de problemas

Tarefa 1. Na terceira questão desta tarefa, o trabalho de grupo começa com a leitura individual do enunciado. Os alunos identificam, facilmente, os dados e a questão do problema e recorrem aos seus conhecimentos para o categorizar como sendo um problema de aritmética intervalar. Por isso, organizam os dados disponibilizados no enunciado, escrevendo-os em forma de intervalo, usando um valor aproximado e o erro associado. Depois de compreender o problema, os alunos estabelecem um plano inicial no qual optam por planificar hierarquicamente a solução, ou seja, começam por aplicar as regras da aritmética intervalar para efectuar a divisão dos intervalos e depois calculam o erro pretendido a partir da definição. Gonçalo explica, durante a entrevista, a estratégia que adoptam: "Seguindo o raciocínio da divisão de intervalos (…). O quociente do intervalo 'a', dado por 2 ± 0,1 pelo intervalo 'b', dado por 1,2 ± 0,02 originará um novo intervalo 'c' e poderemos então calcular o erro a partir daí" (E1).

No entanto, antes da fase de execução, Gonçalo reflecte sobre a eficiência da estratégia anterior e reformula o plano no sentido de o simplificar: "Para calcularmos o erro, basta calcular a diferença entre o extremo máximo do intervalo 'c' e o valor médio deste" (E1). Para calcular o extremo máximo do intervalo resultante da divisão dos dois intervalos iniciais, o aluno utiliza uma divisão parcial entre dois valores que selecciona de forma estratégica, recorrendo às propriedades dos números reais e suas operações, como explica: "O valor do extremo máximo de 'c' é dado pelo quociente do valor máximo de 'a', ou seja a_1 que terá o valor de 2 + 0,1 pelo valor mínimo do intervalo 'b', ou seja b_1 que terá o valor de 1,2 - 0,02" (E1). No cálculo do valor médio, utiliza também uma divisão parcial entre os dois valores aproximados, fornecidos no enunciado, sem ter em conta os respectivos erros: "O valor médio será um valor sem erro, ou seja, o quociente de 2 por 1,2" (RT1). Gonçalo mostra que compreende as razões que fundamentam a formação das regras da aritmética intervalar e é capaz de utilizar esse conhecimento para seleccionar estratégias correctas e eficientes para resolver o problema. O aluno utiliza as definições de majorante do erro e de valor aproximado (ou médio) e chega à resposta correcta, efectuando o cálculo da diferença entre o extremo máximo e o valor médio, como planeado.

Gonçalo não verifica a resposta, talvez porque está confiante nos cálculos simples que efectua e nas opções estratégicas que toma, fundamentadas em conceitos e propriedades matemáticas. Não tenta interpretar o resultado, no contexto do problema (por exemplo, comparando-o com os erros dos dados iniciais) nem analisa se pode chegar ao mesmo resultado de outra maneira, até porque considera que a sua estratégia é a mais eficiente.

Assim, nesta tarefa, o aluno tem facilidade em interpretar o problema e em identificar os dados. Gonçalo também é capaz, depois de estabelecer um plano, de reflectir sobre as estratégias a usar e de seleccionar a que considera mais eficiente para o executar e encontrar uma solução. No final, o aluno não verifica os cálculos nem os resultados e também não interpreta o resultado.

Tarefa 2. Os alunos iniciam o trabalho em torno da última questão desta tarefa fazendo uma leitura individual do enunciado. Identificam facilmente os dados e a questão do problema. Durante a entrevista, Gonçalo reconta o problema, numa linguagem natural e identifica o seu tipo: "A fórmula que nos apresentam [$v = u\ln(m_0/m_0\text{-}qt)\text{-}gt$] dá-nos a velocidade de lançamento do míssil, sendo-nos solicitado o valor de *t* (tempo), no qual o míssil atinge a velocidade de 1000 m/s. Este problema prende-se com a resolução de equações" (E2). Também esclarece que o seu plano inicial contempla a resolução analítica da equação, após a substituição das incógnitas da respectiva expressão pelos valores dados no enunciado: "Uma vez que tínhamos os dados todos, à excepção do tempo, tentámos encontrar o valor de *t* resolvendo a equação analiticamente, como antigamente" (E2).

Durante o trabalho em grupo, os alunos tentam executar este plano usando manipulação algébrica, de forma a isolar a variável, mas não são bem sucedidos: "Ao tentar colocar a função em ordem a *t* (…) não o conseguimos fazer" (RT2). Consideram um novo planeamento e é Gonçalo quem sugere a utilização de uma estratégia de redução do intervalo, isto é, utilizar o algoritmo construído pelos alunos na questão anterior desta tarefa para encontrar um intervalo (reduzido) de valores que contenha o valor aproximado para a solução da equação, como explica depois na entrevista: "Partimos das conclusões retiradas com a realização da primeira tarefa para tentar encontrar o valor de *t*, usando intervalos de valores onde se encontrava o *t* que procuramos, reduzindo o intervalo de modo a nos aproximarmos do valor que procuramos" (E2). Apesar desta estratégia não ser a mais eficiente entre as que o aluno tem ao seu dispor para resolver equações não lineares, revela a sua compreensão sobre a utilidade dos métodos numéricos na resolução de problemas sem solução analítica. As estratégias escolhidas pelo aluno para a execução deste plano são partir do que se sabe e assumir uma solução inicial. Isto é, para iniciar o processo de resolução é necessário escolher um intervalo inicial que contenha o valor da solução da equação e, para isso, o aluno parte do que sabe. O aluno explica como é que, através de manipulação algébrica, encontra um valor máximo para a variável *t* da equação, baseado nas propriedades da função logarítmica:

> Como temos um logaritmo na expressão, aproveitamos este facto para retirar um valor que majora o *t*, sendo este o valor usado para extremo do nosso intervalo inicial. Sabemos que $(m_0/(m_0-qt)) > 0$
>
> $-qt > -m_0$
>
> $t < m_0/q$
>
> Substituindo m_0 e q pelos seus valores sabemos que $t < 59{,}702$. (E2)

Para encontrar um valor mínimo para *t*, que assume como extremo inferior do intervalo, o aluno explica que tem que fazer diversas tentativas, atribuindo valores a *t*: "Fomos dando valores a *t* para a velocidade ficar inferior a 1000m/s" (E2).

Como o processo de redução do intervalo é iterativo, os alunos têm que encontrar um critério de paragem. Gonçalo refere que utilizam a relação entre conceitos, neste caso entre o número de algarismos significativos e a amplitude do intervalo, para determinarem o erro máximo admissível que determina a paragem do processo: "Este processo pode-se aproximar tanto ou mais do valor de *t* verdadeiro, dependendo para isso dos algarismos relevantes que vamos usar" (E2). O aluno revela, assim, ter uma base de recursos, envolvendo o conhecimento de conceitos e a familiarização com uma variedade de estratégias, que lhe permite uma eficiente execução dos seus planos.

Os alunos, no seu trabalho de grupo, encontram uma solução aproximada e respondem correctamente ao problema. No entanto, não verificam a solução, talvez porque o valor encontrado está de acordo com o esperado. Depois de encontrada uma solução, os alunos também não tentam resolver o problema de outra forma nem reflectem sobre a eficiência deste processo de resolução.

Gonçalo, nesta tarefa, tem facilidade em interpretar o problema e em identificar os dados. O aluno revela, igualmente, que é capaz de estabelecer um plano e de seleccionar diversas estratégias (e adequadas) para o executar e encontrar uma solução. No entanto, não sente necessidade de verificar os cálculos ou os resultados e, no final, também não procura outra forma de resolver o problema nem reflecte sobre a eficiência do processo de resolução que utiliza.

Tarefa 3. Nesta tarefa, Gonçalo tem facilidade em identificar os dados fornecidos na última questão. Na entrevista, o aluno reconta o problema numa linguagem natural, de forma a dar-lhe sentido: "Uma vez que o tempo de funcionamento da máquina está dependente da voltagem em que a máquina opera, podemos encontrar uma relação entre a voltagem e o tempo de funcionamento usando os valores que nos são dados" (E3). Com base nos seus conhecimentos, o aluno também classifica o problema: "O problema pode ser resolvido aplicando interpolação polinomial" (E3).

Durante o trabalho de grupo, os alunos estabelecem um plano de resolução que contempla a construção de um modelo matemático que descreva adequadamente os dados apresentados e a relação entre eles. No entanto, ao observarem os dados da tabela apresentada no enunciado, concluem: "Temos dados de vários tempos para a mesma voltagem" (RT3). Este facto contradiz o seu conceito de função e torna-se um obstáculo à construção do modelo. Para ultrapassarem esta dificuldade, Gonçalo propõe uma modificação do problema, através da redução dos dados, como explica: "Nos pontos onde a voltagem tinha vários tempos, fazemos a média. Ficamos então com 4 pontos" (E3). O aluno revela, assim, ser capaz de recorrer aos seus conhecimentos para propor estratégias de resolução adequadas e para modificá-las quando estas não conduzem à solução pretendida.

Novamente, a trabalhar em grupo, os alunos usam cálculos simples para estimar a média dos tempos de falha das máquinas, para cada uma das voltagens a que foram sujeitas e constroem uma tabela para registar esses resultados:

> Temos então os seguintes pontos:
>
> | **X** | 110 | 115 | 120 | 130 |
> |---|---|---|---|---|
> | **Y** | 2175 | 2196 | 2297 | 2390 |
>
> (RT3)

Com base nos dados desta tabela, os alunos recorrem aos conhecimentos recentemente adquiridos e utilizam uma estratégia de interpolação polinomial, através do método de Newton com diferenças divididas, para construírem um modelo matemático que os represente. Uma vez que têm quatro nós disponíveis optam, rotineiramente, por construir um polinómio do 3.º grau mas não simplificam a expressão da função encontrada e dão por terminada a tarefa:

> $p_3(x) = 2175+4{,}2(x-110)+1{,}6(x-10)(x-115)+0{,}065(x-10)(x-115)(x-120)$
>
> Está assim descrita a relação entre a voltagem e o tempo em que a máquina opera. (RT3)

A opção dos alunos, apesar de correcta tendo em conta as propriedades dos polinómios, não é a mais adequada pois não está relacionada com o comportamento dos dados. Gonçalo reconhece-o na entrevista: “Não pensei no grau, temos os quatro pontos e fizemos... Do 3.º grau”. O aluno também não verifica os cálculos nem a resposta uma vez que encontra uma função do 3.º grau e isso confere com o esperado. Deste modo, não reflecte sobre a eficiência da estratégia que usa nem explora a possibilidade de usar outras estratégias para chegar ao mesmo resultado. Apesar disso, durante a entrevista o aluno reconhece que a opção pela utilização de conhecimentos recentes, ainda pouco consolidados, pode ter contribuído para este facto:

> É que eu não tinha bem a noção quando é que podíamos usar as interpolações, qual a razão de ser, como é que íamos justificar e se calhar, com mais tempo, tinha ido ver isso e tinha percebido que os gráficos também

> eram importantes. A matéria mais recente e que tentámos utilizar tinha é que estar mais consolidada para chegarmos e fazermos bem e foi isso que não aconteceu. Se fosse hoje abordaria de forma diferente. (E3)

Gonçalo mostra, mais uma vez, facilidade na interpretação dos dados e da questão do problema proposto nesta tarefa. Além disso, é capaz de estabelecer um plano inicial e, quando verifica que a sua execução não o conduz a uma solução, propõe um plano alternativo. No entanto, o aluno não verifica os cálculos nem interpreta os resultados e também não faz qualquer tentativa de exploração de estratégias alternativas ou mais eficientes.

7.3. Aprendizagens do aluno em Análise Numérica

A exploração das tarefas propostas permite abordar diversos tópicos programáticos e facilita a aprendizagem significativa de conceitos e procedimentos de Análise Numérica, como Gonçalo reconhece durante a entrevista: "[As tarefas servem] para nós nos aproximarmos da matéria e aprendermos mesmo… Acho que facilitou a aprendizagem e até ajudava a perceber para que é que aquilo servia. A aplicação… Que normalmente passa ao lado" (E4).

Alguns conceitos fundamentais na disciplina são, frequentemente, construídos pelo aluno, que desempenha assim, um papel essencial no seu processo de ensino-aprendizagem. Este aspecto é, inclusivamente, salientado pelo aluno como positivo: "Na maioria dos casos, aproximávamo-nos da matéria que viríamos a aprender, constituindo uma gratificação pessoal, tendo em conta que nos era totalmente desconhecida" (E4). Por exemplo, o conceito de método iterativo (e em particular o método da bissecção) surge de forma intuitiva e o aluno aplica-o correctamente na resolução de equações não lineares na tarefa 2:

> Para tentar encontrar o valor de *t*, usa-se intervalos de valores onde *t* se encontre, reduzindo o intervalo de modo a nos aproximarmos do valor que procuramos. (…) Considerando o intervalo [a, b] (…), sabemos que o valor de t para o qual a velocidade é a pretendida se encontra entre os valores de a e b. (…). A partir de cada intervalo contendo o valor de t, dividimos o intervalo em dois e verificamos em que parte se encontra o valor de t. Este processo pode-se aproximar tanto ou mais do valor de t verdadeiro. (RT2)

No primeiro teste de avaliação, o aluno também utiliza, de forma correcta, diferentes métodos iterativos. Nessa altura revela compreender a dependência destes métodos de um valor inicial e é capaz de identificar a solução final (onde, habitualmente, os alunos têm dificuldades):

> $f(x) = x^3 - x - 1$ com α raiz em [1,2]
>
> $f'(x) = 3x^2 - 1$
>
> Utilizando o 2 como ponto de partida, temos

x	$f(x)$	$f'(x)$	$x - f(x)/f'(x)$
2	5	11	1,54
1,54	1,11	6,11	1,36
1,36	0,16	4,55	1,325
1,325			

> Logo α = 1,325 (T1)

No mesmo teste, quando solicitado a mostrar a convergência de um método iterativo, cuja expressão iteradora é dada, o aluno opta por aplicá-la e calcular o erro associado à solução obtida, em cada iteração. Embora não seja a estratégia mais eficiente, Gonçalo mostra que é capaz de relacionar a convergência dos métodos iterativos com a diminuição sistemática dos erros associados às soluções aproximadas que vai obtendo:

x_0	1,4	
x_1	1,3389	E = 0,04563
x_2	1,3274	E = 0,00866
x_3	1,3252	E = 0,00166

> Os erros diminuem, logo converge. (T1)

Também na tarefa 3, é notória a capacidade de, intuitivamente, utilizar conceitos ainda não trabalhados, como é o caso da regressão através do método dos mínimos quadrados. O aluno utiliza as diferenças entre os valores experimentais dados e os valores obtidos com os diferentes modelos matemáticos que explora, como erros, para seleccionar o melhor ajustamento: "Calculamos os erros absolutos entre os modelos e o local dado. Determina-se o melhor modelo (…) [que] é o que apresenta menores erros" (RT3). É precisamente este o conceito que está na base da construção do método dos mínimos quadrados para ajuste de curvas e que Gonçalo acaba por utilizar também noutras tarefas e no teste de avaliação. Por exemplo, na tarefa 4, o aluno faz menção de ajustar uma função aos pontos disponíveis para representar a imagem dada no enunciado, revelando compreensão sobre a utilidade deste procedimento: "Era possível encontrar uma função que representasse o fundo da secção através de um ajuste aos pontos dados" (RT4).

No entanto, é no segundo teste que a aprendizagem da regressão é mais notória, uma vez que Gonçalo utiliza o método dos mínimos quadrados, correctamente e de forma reflectida, para ajustar diferentes modelos aos dados disponibilizados. Quando solicitado a encontrar os parâmetros do modelo de potência que representa um conjunto de dados disponibilizados no enunciado, o aluno lineariza a expressão do modelo, através de manipulação algébrica, para poder aplicar as fórmulas correspondentes à regressão linear (que são modificadas, também, de acordo com os dados que lhes vão servir de base aos cálculos):

> Se $Y = \mathrm{a}x^{\mathrm{b}}$, temos que $\ln Y = \ln \mathrm{a} + \mathrm{b}\ln x$
>
> Usando o método dos mínimos quadrados temos que
>
> $$\mathrm{b} = \frac{n\sum x'_i y'_i - \sum x'_i \sum y'_i}{n\sum x'^2_i - \left(\sum x'_i\right)^2} \text{ e } \ln \mathrm{a} = \overline{y'} - \mathrm{b}\,\overline{x'}$$
>
> Com $x' = \ln x$ e $y' = \ln y$
>
> (…) Ficamos então com o seguinte modelo $\mathrm{Y} = 2{,}397x^{0{,}6257}$. (T2)

Ainda neste teste, na resolução do último problema, o aluno selecciona esta estratégia quando tem que encontrar uma função que represente a velocidade do navio ao longo de um período de tempo para depois, ao integrá-la, obter a distância percorrida. A escolha do modelo a ajustar é reflectida e tem por base a observação do comportamento dos dados e propriedades matemáticas:

> Graficamente, [os dados] distribuem-se do seguinte modo (…). Podemos fazer então um ajuste aos pontos de uma função polinomial uma vez que se comporta próximo de uma parábola. Essa função será a função velocidade em função do tempo. Para retirarmos a distância basta ver que $v = \frac{\partial x}{dt}$ (…). (T2)

Outro tópico abordado nesta disciplina, onde as aprendizagens são visíveis, diz respeito à análise de erros, um tema transversal a todo o programa. Gonçalo recorre ao conceito de intervalo em diversas tarefas e relaciona-o com os conceitos de valor aproximado e de erro, mostrando compreensão dos mesmos ao utilizá-los, de forma correcta, em diferentes situações. Por exemplo, na última questão da tarefa 1, o aluno calcula o erro fazendo "a diferença entre o extremo máximo do intervalo (…) e o valor aproximado deste" (RT1). Também na tarefa 2, o aluno apresenta como solução um valor aproximado e, apesar de não ser pedido, tem o cuidado de lhe associar um erro, mostrando ser capaz de relacionar estes conceitos: "Neste caso concluímos que a velocidade de 1000 m/s é atingida aproximadamente ao $t \approx 25{,}940$ ou seja, $25{,}940 \pm 0{,}008$" (RT2). É, no entanto, na tarefa 4 que o domínio destes conceitos e suas relações é mais visível. Não sendo possível calcular a área exacta de uma figura, o aluno tenta encontrar um valor aproximado para essa área, construindo intervalos que a enquadrem e, a partir destes, quantifica o erro:

> Conseguimos obter um valor máximo para a área e um valor mínimo, tendo assim um intervalo que contenha o valor verdadeiro da nossa área. Encontramos assim, uma maneira de calcular uma área aproximada cujo valor é o valor médio do intervalo e o erro é a distância do valor médio aos extremos. (E4)

O aluno também utiliza os conceitos de valor aproximado e de erro nos testes de avaliação. No primeiro teste, por exemplo, o aluno atribui erros, de forma correcta, aos valores aproximados dados no enunciado, embora não descreva o raciocínio que usa para o fazer: "$H = 5 \pm 0{,}5$ e $R = 10 \pm 0{,}5$" (T1). Além disso, conhece e é capaz de seleccionar adequadamente, a forma de calcular o valor do erro associado às soluções obtidas, consoante o método que aplica. Por exemplo, quando utiliza a interpolação polinomial, calcula o erro da seguinte forma: "Se calcularmos o $p_3(0{,}4)$ aproximamos o nosso resultado. Comparando o valor de $p_3(0{,}4)$ com $p_2(0{,}4)$ podemos então calcular e majorar o erro absoluto" (T1). Já no caso da integração numérica, Gonçalo utiliza as expressões algébricas deduzidas a partir da integração das respectivas expressões dos erros da interpolação polinomial, de acordo com as regras de integração seleccionadas:

> Como dividimos o cálculo do nosso integral em três, vamos ter que calcular o erro obtido em cada um dos intervalos, sendo que um majorante da soma obtida vai ser o majorante para o erro total da aproximação feita.

> Em I_1 usamos a regra de Simpson 1/3 em que h = 0,2, logo o erro em I_1 será $E = -\frac{0,2^5}{90} f^{(4)}(\zeta)$ (…). (T2)

Os dados mostram ainda que Gonçalo é capaz de mobilizar os conhecimentos de interpolação polinomial e aplicar os respectivos procedimentos a novas situações, apesar deste tema programático ser introduzido aos alunos em aulas de carácter expositivo. O aluno recorre aos métodos de interpolação polinomial, na tarefa 3, para interpolar os valores em falta nas tabelas fornecidas: "As tabelas podem ser completadas aplicando interpolação polinomial" (RT3). Usa-os, igualmente, para encontrar modelos matemáticos (neste caso, funções polinomiais) que descrevem relações entre conjuntos de dados: "Vamos usar o método de interpolação de Newton para chegar a uma relação" (E3).

Nos testes de avaliação, o aluno também responde de forma correcta às questões relativas a este tópico e parece compreender os procedimentos e as condições necessárias para aplicar os métodos de interpolação. As suas respostas mostram que é capaz de seleccionar o método de interpolação mais adequado a cada situação:

> Escolho 4 pontos inicialmente pois são necessários para obter um polinómio do 3.º grau, sendo que foram estes por se encontrarem próximos do valor a interpolar (0,45). Usando um polinómio de Newton com diferenças divididas uma vez que vou usar os seguintes pontos (…). Temos que $p_3(x) = fx_0 + 1\Delta(x-x_0) + 2\Delta(x-x_0)(x-x_1) + 3\Delta(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ (…). (T2)

O aluno reconhece ainda as potencialidades deste tipo de tarefas para desenvolver a compreensão dos processos por ele vividos e das razões que estão por trás da construção dos métodos numéricos de alguns tópicos programáticos abordados no decorrer do semestre:

> Assim vamos ficar com os processos mais aprendidos para o futuro, logo, quando um dia for necessário recorrer a essas fórmulas, mesmo que não as saibamos de cor, podemos sempre chegar a elas pelos mesmos caminhos em que estivemos a trabalhar. (E2)

O desenvolvimento do espírito crítico e do raciocínio na resolução de problemas são, também, alguns dos aspectos que Gonçalo refere como fazendo parte do que considera ser aprendizagens significativas. Com a realização das tarefas propostas, o aluno toma consciência da existência de diferentes abordagens e estratégias para a sua exploração e, em particular, para a resolução de problemas:

> Com a realização de trabalhos [deste tipo] conseguimos o desenvolvimento do sentido crítico, desenvolvimento do raciocínio e de estratégias para resolver problemas propostos e ficar com maior conhecimento sobre a Análise Numérica. Também ficámos um pouco mais conscientes para o facto de existirem diferentes formas de abordar um problema. (E5)

A aquisição de conhecimentos de Análise Numérica não esgota, assim, o processo de aprendizagem de Gonçalo: "Aprendi mais alguma coisa além da matéria…" (E5). A elaboração dos relatórios escritos no final da exploração das tarefas parece ajudar o aluno a desenvolver a capacidade de comunicação escrita que é, no seu entender, o aspecto mais importante deste processo:

> Ter que ler e ver se o que está escrito faz sentido para outra pessoa ler… Mais por aí é que esses trabalhos fazem sentido. Ajuda a parte da Análise Numérica mas mais importante, que era o que estava a dizer, é que ajuda-nos a aprender o que é mais importante, seja a fazer um relatório ou outro tipo de trabalho. Para mim vale mais por isso. (E4)

Na realidade, a experiência que o aluno adquire na escrita dos relatórios parece influenciar a forma como responde às questões dos testes. No primeiro teste (em que obteve uma classificação de 12 valores), Gonçalo limita-se a aplicar os métodos numéricos que julga adequados, sem justificar as suas opções. O aluno apresenta, essencialmente, resultados finais ou indica procedimentos sem os realizar até à obtenção de uma solução. Por isso, a resolução dos exercícios fica, algumas vezes, incompleta ou mesmo errada. A abordagem aos problemas é feita de forma única mas correcta e utilizando, sempre que possível, os conhecimentos mais recentes relativos à disciplina. No segundo teste, o aluno melhora um pouco a sua classificação (15 valores). Esta evolução deve-se, sobretudo, às respostas mais completas, com todas as opções e raciocínios descritos detalhadamente e justificados com base em teoremas e propriedades matemáticas. Estes aspectos permitem ao aluno fazer escolhas mais adequadas (mesmo em termos de eficiência) e obter resultados mais exactos. Além disso, o aluno parece ter ultrapassado a 'preguiça inicial' pois já termina os exercícios, de forma correcta, apresentando todos os cálculos que efectua. Na resolução dos problemas, Gonçalo continua a optar por aplicar os conhecimentos abordados mais recentemente mas sem apresentar formas alternativas de resolução. No entanto, este facto pode ser devido às limitações de tempo que os testes impõem.

7.4. Síntese

Uso de diferentes representações. Os resultados obtidos revelam que Gonçalo utiliza diferentes representações ao longo do seu trabalho nas tarefas de investigação, com objectivos diversos. O aluno revela tendência para, naturalmente, utilizar a representação gráfica, mesmo quando outros tipos de representações são possíveis. Por exemplo, o aluno recorre à representação gráfica, com frequência, para analisar a informação disponibilizada no enunciado, como forma de compreensão. No entanto, há situações em que o aluno utiliza a representação gráfica também para obter soluções, mesmo tendo outros métodos à sua disposição. Nestes casos, recorre à máquina de calcular e às suas potencialidades como uma ferramenta auxiliar na representação gráfica da informação, na construção de gráficos de funções e na obtenção de soluções de forma eficiente. Algumas vezes, estes gráficos servem para explicar/mostrar os seus raciocínios ou para confirmar os resultados obtidos através de outros métodos. No final da experiência de ensino, o aluno ainda é capaz de planear e seleccionar as suas estratégias com base na análise dos gráficos e, deste modo, a representação gráfica passa a ter um papel importante na justificação dos seus raciocínios e das soluções encontradas.

As figuras geométricas dominam o trabalho de exploração que Gonçalo realiza na última tarefa. O aluno usa-as para visualizar a informação disponível e auxiliar as decisões estratégicas, para explicar/mostrar raciocínios e para justificá-los. Estas figuras e os processos de raciocínio que nelas se apoiam, à semelhança do que acontece também com as representações gráficas, são sempre descritos e justificados, detalhadamente, através da linguagem natural. Para a generalização de regras e na tentativa de as formalizar, o aluno continua a utilizar a linguagem natural mas complementa-a com alguma notação simbólica. Algumas vezes, quando esse processo de generalização resulta na construção de um método numérico, o aluno apresenta-o na forma de algoritmo, utilizando também um misto de linguagem natural e simbólica.

A representação algébrica tem uma presença reduzida no trabalho de Gonçalo. O aluno usa a manipulação algébrica apenas enquanto procedimento de preparação para o uso de outras estratégias ou em situações em que é induzido pela prática escolar, caso em que a abandona assim que identifica a sua inviabilidade na obtenção de resultados.

A tabela é outra representação que Gonçalo utiliza, com bastante frequência, para apresentar dados e cálculos (e os resultados destes) de forma organizada. O objectivo parece ser facilitar, por um lado, a identificação da informação necessária à realização de cálculos e a própria execução desses cálculos e, por outro, uma rápida análise de resultados. O aluno parece ter a percepção de que uma adequada disposição de dados pode auxiliar os cálculos seguintes, uma vez que o uso de tabela está, quase sempre, associada ao uso de algoritmos recursivos.

A escolha das representações que o aluno usa parece ser intencional, de forma a facilitar o trabalho de exploração das tarefas, uma vez que estas são, geralmente, adequadas e eficientes. Por diversas vezes, Gonçalo revela também ser capaz de estabelecer relações entre diferentes representações.

Raciocínio em tarefas de investigação. Os processos matemáticos envolvidos na exploração de tarefas de investigação podem ajudar a compreender as características do raciocínio desenvolvido pelo aluno. Os dados recolhidos mostram que, durante a realização das tarefas de investigação propostas, Gonçalo utiliza diversos processos característicos da actividade matemática, embora com ênfase diferente.

A procura de regularidades, quando está presente no trabalho desenvolvido pelo aluno, é feita através de observação directa dos dados ou é baseada em representações gráficas ou esquemas numéricos e simbólicos que constrói com esse objectivo. Este processo facilita, geralmente, a identificação de padrões e o trabalho seguinte na formulação de conjecturas. Quando o aluno não tem em conta toda a informação disponível, surgem dificuldades na identificação de padrões e a formulação de conjecturas fica também limitada.

A formulação de conjecturas é um processo utilizado pelo aluno em todas as tarefas mas nem sempre de forma explícita. Estas conjecturas são, frequentemente, baseadas na identificação de padrões, em analogias, na análise de gráficos e figuras geométricas ou na experimentação exaustiva de casos. No entanto, Gonçalo também é capaz de utilizar processos dedutivos, baseados em propriedades ou conceitos matemáticos, para formular conjecturas. Estas estratégias parecem ser escolhidas, pelo aluno, de forma a permitir a identificação de propriedades relevantes para facilitar o posterior processo de generalização. Este processo está presente sempre que solicitado, apresenta-se, geralmente, correcto e, em algumas situações, resulta na construção de métodos numéricos desconhecidos pelo aluno (por exemplo, os métodos da bissecção e dos mínimos quadrados). Os resultados desta generalização são sempre descritos informalmente, em linguagem natural e apresentados na forma simbólica ou algorítmica.

Por vezes, o aluno formula várias conjecturas simultâneas que resultam de diferentes explorações ou que são baseadas em pressupostos diferentes no sentido de alargar a exploração da tarefa. Outras vezes, quando há diversos factos a considerar na formulação de uma conjectura, Gonçalo opta por formular conjecturas parciais sobre cada um deles e, quando dá por terminado este processo, formula uma conjectura mais geral tendo em conta as anteriores. Na última tarefa, o aluno também formula diferentes conjecturas mas de forma sucessiva e no sentido de as refinar. Este processo tem por base uma análise de figuras geométricas e o objectivo é obter melhores aproximações da solução inicial.

O trabalho desenvolvido por Gonçalo contempla, de forma espontânea, o teste de conjecturas. Quando este processo tem por base as representações gráficas ou a experimentação de casos, geralmente os exemplos disponíveis no enunciado ou outros sem sistematização evidente, o aluno nem sempre se apercebe de incorrecções ou limitações nas conjecturas formuladas. A identificação desses erros e a posterior correcção das conjecturas só acontece quando o aluno usa toda a informação disponível e é capaz de a relacionar, na realização do teste. Algumas vezes, as conjecturas são formuladas usando raciocínio lógico, baseado em propriedades ou conceitos matemáticos já conhecidos. Nestes casos, o aluno já não sente necessidade de realizar qualquer tipo de teste, revelando compreender o papel do teste de conjecturas no trabalho de exploração.

O aluno tem sempre o cuidado de explicar, detalhadamente, todos os seus raciocínios. Essas explicações são, geralmente, apresentadas de uma forma descritiva, usando uma linguagem natural e têm por base argumentos visuais. Há, no entanto, algumas vezes, em que o aluno não se limita a explicar o 'como' dos seus raciocínios mas também justifica o 'porquê', com base em propriedades matemáticas. Deste modo, a justificação de conjecturas surge naturalmente e com frequência, ao longo do trabalho do aluno, durante a descrição que faz dos seus raciocínios ou quando formula conjecturas usando raciocínio dedutivo e não como um processo explícito e intencional. Gonçalo parece ter facilidade em compreender os argumentos que usa, uma vez que estes são, de forma geral, adequados e aplicados de forma correcta. Apesar disso, a argumentação mantém-se descritiva com recurso à linguagem natural, pelo que o processo de justificação de conjecturas se apresenta informal.

Raciocínio em problemas. Gonçalo tem facilidade em identificar os dados e em compreender a questão mas parece ter necessidade de explicar, por palavras suas, o que é dado e o que se pretende. Assim, após a leitura do enunciado, o aluno tenta interpretar os problemas recontando-os, em linguagem natural. Nesta fase de compreensão, também utiliza os seus conhecimentos (conceitos matemáticos, propriedades e procedimentos) para identificar o tipo de problema e, de acordo com essa classificação, planear a sua resolução.

Na fase de exploração e planificação, o aluno mostra ter conhecimentos suficientes (sobre conceitos e procedimentos matemáticos) e algum potencial heurístico para seleccionar, de forma adequada a cada problema, as heurísticas que podem conduzir à solução pretendida. As estratégias identificadas são variadas e incluem organizar e reduzir dados, planificar hierarquicamente a solução, substituir incógnitas ou manipular algebricamente expressões para as simplificar, utilizar algoritmos construídos pelos alunos ou construir modelos matemáticos. Por vezes, Gonçalo avalia a viabilidade ou a eficiência da estratégia proposta, imaginando o desenvolvimento do processo de resolução, ainda durante esta fase de planificação. Quando o aluno, através da observação dos dados e com base nos seus conhecimentos matemáticos, identifica algum obstáculo à execução da estratégia proposta no plano inicial, opta por modificar o problema (por exemplo, reduzindo os dados) de forma a adaptá-lo à estratégia. Pelo contrário, quando o aluno reflecte sobre a estratégia planeada e verifica que esta não é a mais eficiente, opta por reformulá-la, simplificando-a ou por planificar novas estratégias.

Durante a fase de execução, o trabalho desenvolvido por Gonçalo é orientado para cumprir o plano proposto. Esse trabalho contempla a realização de cálculos, que o aluno regista, com algum detalhe e a utilização de várias estratégias, adequadas a cada problema, que permitem obter uma solução para o problema. Destas, destacam-se a manipulação algébrica, a substituição de incógnitas, o partir do que se sabe e assumir uma solução inicial, a estimação de valores, a redução de dados e a execução de algoritmos construídos pelos alunos ou de métodos numéricos conhecidos. Nesta fase, o aluno revela ter os conhecimentos (conceitos e procedimentos) necessários para resolver os problemas, de forma correcta, com as estratégias que selecciona. No entanto, é notória a tendência que o aluno tem para optar por procedimentos que conhece mais recentemente, alguns dos quais deduzidos por si durante a exploração das questões anteriores da própria tarefa (são disso exemplo, os métodos de interpolação polinomial ou o método da bissecção para resolução de equações não lineares). Estes procedimentos são muitas vezes aplicados de forma rotineira e, por isso, nem sempre são os mais adequados em termos de eficácia e eficiência. O próprio aluno reconhece este facto e considera que isso se deve a conhecimentos que ainda estão pouco consolidados por serem recentes.

A avaliação da estratégia planeada também pode ocorrer durante esta fase de execução. Quando o aluno tenta encontrar uma solução através da estratégia planeada, e não obtém resultados, volta atrás à fase de planificação, selecciona nova estratégia e recomeça nova fase de execução. No entanto, esta avaliação não contempla a eficiência de estratégias que fica, assim, comprometida.

Apesar do aluno conhecer as potencialidades da máquina de calcular para obter soluções de forma eficiente, as estratégias que selecciona para resolver os problemas não exigem mais do que a sua utilização apenas como instrumento de cálculo. A máquina de calcular tem, assim, um papel reduzido na resolução destes problemas.

Gonçalo não verifica os cálculos nem a resposta, provavelmente porque o valor encontrado confere com o esperado ou porque tem confiança nas opções estratégicas que toma, fundamentadas em conceitos e propriedades matemáticas. Depois de obter uma solução, o aluno também não tenta interpretar o resultado no contexto do problema nem analisa se pode chegar ao mesmo resultado de outra maneira, talvez por não reflectir sobre a eficiência do processo de resolução ou porque, quando o faz na fase de planeamento, considera a sua estratégia a mais eficiente.

Aprendizagem em Análise Numérica. Os resultados mostram que a realização de tarefas de investigação permitem abordar diversos tópicos programáticos da disciplina de Análise Numérica e estabelecer ligações entre eles. Para além disso, facilitam a aprendizagem significativa de conceitos e procedimentos desta disciplina.

Gonçalo desenvolve compreensão de vários conceitos e procedimentos base da disciplina de Análise Numérica, como por exemplo, os conceitos de intervalo, valor aproximado e erro ou os métodos de interpolação polinomial e ajuste curvas. O aluno utiliza-os, correctamente, na exploração das várias tarefas propostas e nos testes de avaliação, revelando ser capaz de mobilizar e relacionar estes conhecimentos recentes para os aplicar, adequadamente, a diferentes situações. O seu desempenho revela que o aluno compreende a utilidade e a aplicabilidade destes conceitos e procedimentos e contribui para a sua aprendizagem.

Os resultados evidenciam, igualmente, que determinados conceitos (por exemplo, o de método iterativo) e procedimentos (como os métodos da bissecção e dos mínimos quadrados), contemplados no programa da disciplina mas ainda não trabalhados nas aulas, são construídos pelo aluno de forma intuitiva, durante a exploração das tarefas propostas. O aluno refere que, deste modo, compreende a origem e os fundamentos destes conhecimentos em vez de memorizar definições e fórmulas (que são facilmente esquecidas) e que quando precisar de os utilizar, pode aceder-lhes através da reprodução deste processo de construção. Assim, é o próprio aluno que reconhece as potencialidades das tarefas de investigação para uma aprendizagem significativa e o papel essencial que desempenha neste processo.

A aprendizagem do aluno não se esgota na aquisição de conhecimentos relativos aos tópicos da Análise Numérica. Gonçalo salienta alguns aspectos que considera fazerem parte da sua aprendizagem nesta disciplina. Por exemplo, a exploração das tarefas de investigação contribui para desenvolver, no aluno, a capacidade de comunicação e o espírito crítico, através dos relatórios escritos e das discussões em grande grupo e dentro dos próprios grupos (entre os seus elementos). Facilita, igualmente, o desenvolvimento do raciocínio na resolução de problemas, pelo facto de o aluno tomar consciência da existência de diferentes abordagens e estratégias para a sua resolução.

Capítulo 8

O Caso Luís

A análise seguinte foca-se no trabalho desenvolvido por Luís na realização das diferentes tarefas de investigação propostas no decorrer da disciplina de Análise Numérica. Começo por fazer uma breve caracterização do aluno para depois apresentar uma descrição detalhada dos resultados referentes ao seu raciocínio no trabalho com representações, na realização das tarefas de investigação e na resolução de problemas, bem como às aprendizagens desenvolvidas. De seguida, tendo em conta as questões do estudo, faço uma síntese desses resultados.

8.1. Apresentação do aluno

Luís é um aluno do curso de Administração Naval e inicia o ano lectivo com 20 anos. Até ao ensino superior, o seu percurso escolar é bem sucedido, quer a Matemática, quer a outras disciplinas e não regista qualquer retenção. Apesar disso, os resultados escolares que agora apresenta (classificações médias/baixas) levam a considerá-lo um estudante abaixo da média. Na sua opinião, as dificuldades surgem no início do curso devido ao volume de trabalho e à falta de concentração, como ele próprio refere: “Agora tenho mais dificuldades. Mas sei bem o que me afecta, talvez porque tenho mais cadeiras e não consigo concentrar-me para estudar e para pensar. Eu sei que consigo mas às vezes não me consigo concentrar nos testes. A concentração é que está a faltar” (E5).

É um aluno tímido mas confiante nas suas capacidades de aprendizagem e empenhado nas tarefas que lhe são propostas. Nas aulas, é um aluno motivado, participativo e que está sempre com atenção. Estuda regularmente fazendo os “trabalhos para casa” e investe também na resolução de exercícios, que tenta fazer procurando semelhanças em exemplos do livro ou das aulas:

> No secundário eram aulas teóricas. A professora dava aulas teóricas, explicava a matéria um pouco e fazia alguns exercícios. Nós fazíamos exercícios como trabalhos de casa. Agora faço primeiro um resumo da teoria e faço alguns exercícios tipo de cada folha que foi visto na teórica. No secundário nós fazíamos quase todos os exercícios do livro porque a professora fazia poucos exercícios práticos e havia um certo grau de dificuldade com alguns exercícios que não praticávamos. Agora faço alguns diferentes só para perceber como se faz cada um deles. (E5)

Luís parece desenvolver o significado para os conceitos e procedimentos através de trabalho de rotina, até se tornar automático. A falta de tempo para continuar a trabalhar deste modo, devido ao aumento do volume de trabalho, também pode estar na origem das dificuldades que enfrenta no início do ensino superior.

As suas disciplinas favoritas são a Física, a Química, a Matemática e o Desenho. Considera que a necessidade de aprender Matemática, no seu caso, se justifica pela importância que tem na sua profissão futura. No entanto, defende a importância desta disciplina para todos os cursos: "Acho que a Matemática é importante para todos os cursos porque são matérias que não estão ligadas com nenhum curso, são de âmbito geral. No dia-a-dia tenho que fazer contas, tenho que planear o que tenho que fazer ou não. E se calhar não conseguia fazer se não tivesse os conceitos" (E5).

No questionário inicial, Luís tem um desempenho bastante abaixo da média. As únicas questões que resolve são aquelas em que pode utilizar procedimentos rotineiros. Mesmo assim, nem sempre os aplica de forma correcta e quando encontra alguma dificuldade, desiste e não procura alternativas. Também não é crítico em relação às respostas que dá e só tenta argumentar quando solicitado. Ao tentar resolver problemas mais abertos e de cunho investigativo, o aluno não é bem sucedido.

8.2. Raciocínio do aluno

No trabalho com representações matemáticas

Tarefa 1. Nesta primeira tarefa, as respostas de Luís para explicar o modo de formação das regras das operações com intervalos, são essencialmente descritivas, utilizando uma linguagem natural:

> Para a adição de dois intervalos é somar os limites... Somam-se o limite inferior de um intervalo com o limite inferior do outro e os superiores de um intervalo com outro. A subtracção… Pensei na operação inversa que

> foi introduzir o sinal negativo dentro do último intervalo e depois foi só somar utilizando a regra que tinha deduzido. (E1)

No entanto, durante o trabalho de grupo, os alunos utilizam raciocínio dedutivo para obter uma regra para a subtracção, com base em propriedades matemáticas já conhecidas. Neste caso, recorrem à manipulação algébrica para mostrar e justificar os seus raciocínios e complementar a descrição anterior:

$$X = [x_1, x_2] \quad Y = [y_1, y_2]$$
$$X - Y = X + (-Y) = [x_1, x_2] + (-[y_1, y_2]) = [x_1, x_2] + ([-y_2, -y_1]) =$$
$$= [x_1 - y_2, x_2 - y_1] \text{ (RT1)}$$

Para generalizar as regras descritas, os alunos utilizam, também, a notação simbólica e constroem expressões algébricas que as formalizam. É de realçar, ainda, que essa notação simbólica inclui o uso correcto de quantificadores, como mostra o exemplo seguinte, situação que é única entre todos os trabalhos da turma:

$$\forall_{X, Y} \in \Re,\ X + Y = [x_1, x_2] + [y_1, y_2] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]$$
$$\forall_Y \in \Re \backslash \{0\},\ X / Y = \frac{[x_1, x_2]}{[y_1, y_2]} = \left[\frac{x_1}{y_2}, \frac{x_2}{y_1}\right] \text{ (RT1)}$$

Na questão seguinte, Luís, em conjunto com os seus colegas de grupo, volta a utilizar a manipulação algébrica e aplica as regras deduzidas anteriormente para mostrar a igualdade entre as funções $f(X) = X + X$ e $f(X) = 2X$:

$$f\colon D \subset \Re \rightarrow \Re$$
$$f(X) = X + X \text{ com } X = [x_1, x_2] \subset D$$
$$f([x_1, x_2]) = [x_1, x_2] + [x_1, x_2] = [x_1 + x_1, x_2 + x_2] = [2x_1, 2x_2] =$$
$$= 2[x_1, x_2]$$

> Logo concluímos que $f(X) = X + X$ também pode ser escrito na forma $f(X) = 2X$. (RT1)

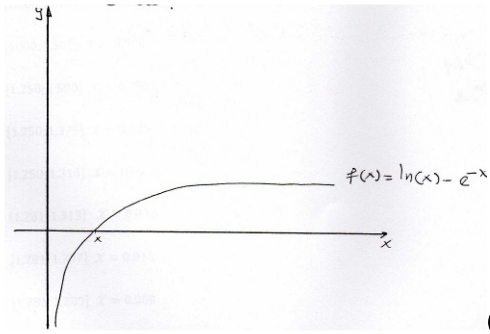
O aluno continua a utilizar a manipulação algébrica e a regra da multiplicação anteriormente deduzida para obter uma expressão geral para a imagem de um intervalo através da função $f(X) = X^2$, como explica depois, durante a entrevista: "Para $f(X) = X^2$ teremos então $f(X) = X \times X$. Utilizámos a regra que deduzimos na questão anterior para fazer X vezes X. Como os intervalos são os mesmos, pode ser escrito na seguinte forma, f(X) = $\left[X_1^2, X_2^2\right]$" (E1). No entanto, como a função não é monótona, a expressão que o aluno obtém através da manipulação algébrica, não é adequada, pois só se aplica a valores positivos. Apesar de verificar algumas incoerências na aplicação da expressão deduzida, Luís não identifica quais os conflitos e os erros na sua dedução nem utiliza outro tipo de representação, por exemplo, a gráfica, tendo em vista corrigir os resultados e obter uma expressão válida e mais geral.

As representações algébricas dominam, assim, o trabalho de exploração desta tarefa. No entanto, o aluno também utiliza a linguagem natural, para descrever alguns raciocínios e explicar as suas respostas, bem como a notação simbólica, para generalizar os resultados.

Tarefa 2. Nesta tarefa, Luís e os colegas de grupo começam por privilegiar a manipulação algébrica para encontrar a solução da equação não linear. No entanto, não são bem sucedidos nesta tentativa de resolução e na entrevista, o aluno explica porquê: "Não consegui isolar totalmente a variável *x* de modo a obter um valor para esta variável" (E2). Esta opção inicial parece estar relacionada com a sua experiência escolar anterior em que a resolução de equações se faz, maioritariamente, através de manipulação algébrica. O aluno refere, ainda, que ao verificar que a estratégia inicial não resulta opta pela resolução aproximada da equação a partir da representação gráfica da função: "Visto que a equação (…) apresenta vários problemas na determinação das suas raízes, pensamos em dar solução à mesma recorrendo à representação gráfica" (E2).

No seu trabalho de grupo, os alunos recorrerem à máquina de calcular e às suas potencialidades para obterem a representação gráfica da função e encontrarem o valor aproximado do seu zero. Apresentam o esboço do gráfico obtido na máquina, desenhado à mão mas formalmente correcto e complementam a representação gráfica com uma descrição em linguagem natural do processo de obtenção da solução da equação:

> É do nosso conhecimento que dada uma função f(x), os seus zeros são as raízes da equação f(x) = 0. Sendo assim, graficamente, os zeros da função são as abcissas dos pontos em que o gráfico da função intersecta o eixo das abcissas (eixo dos *xx*).



(RT2)

Na exploração da questão seguinte, Luís utiliza, mais uma vez, a linguagem natural para descrever o modo de formação dos elementos da sequência apresentada no enunciado, como explica na entrevista:

> A amplitude dos intervalos vai diminuindo para metade relativamente ao intervalo anterior. Também vimos que o limite superior e o limite inferior alteravam, de três em três intervalos, o inferior e de dois em dois o superior (…). Nestes três em que se mantinha o limite superior, era sempre o limite inferior que ia diminuir. Três vezes. Depois alterava e passava a ser o limite superior, duas vezes. (…) A amplitude do próximo intervalo é encontrada através da soma da amplitude ao valor mínimo (a) ou da subtracção ao valor máximo (b) (…). (E2)

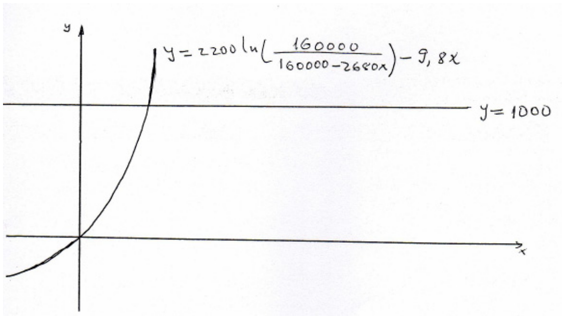
Para generalizar a regra descrita, os alunos, a trabalhar em grupo, utilizam a linguagem natural e complementam-na com alguma notação simbólica, numa tentativa de formalização. No entanto, como não têm o cuidado de definir os símbolos que usam, a notação que apresentam não traduz, de forma adequada, o que é correctamente descrito:

> Reparamos que, para a raiz estar sempre contida no intervalo, a amplitude teria de ser somada ao valor mínimo (a) ou subtraída ao valor máximo (b), consoante o facto de (a) passar a ser superior à raiz ou, por outro lado, se (b) não iria passar a ser inferior à raiz. A partir do que foi dito anteriormente podemos definir a seguinte regra:
>
> Se x - max > (f(x) = 0), então o intervalo seguinte será [min, x - max] ou [x + min, max] se e só se x - max < (f(x) = 0). (RT2)

Para resolver a equação proposta no final desta tarefa, Luís explica na entrevista que por analogia com a primeira questão, tenta novamente a manipulação algébrica, apesar de conhecer e ter à sua disposição outras estratégias mais eficientes: “É exactamente o mesmo problema, tentámos isolar a variável e não conseguimos” (E2). Este comportamento é normal, se atendermos à já referida experiência escolar dos alunos na resolução de equações, que relega para segundo plano a respectiva interpretação gráfica.

Também à semelhança do que acontece na primeira questão, os alunos a trabalhar em grupo, tomam a iniciativa de utilizar a máquina de calcular para representar graficamente a função e encontrar uma solução aproximada para a equação. O processo de obtenção da solução é, novamente, descrito em linguagem natural que complementa a representação gráfica que os alunos apresentam:

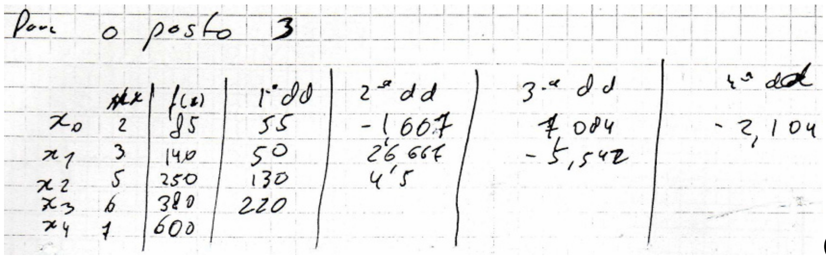
> Traçamos a recta y = 1000 que corresponde ao valor da velocidade para a qual queremos o tempo que se demora a atingir. Fizemos a seguir a intersecção da recta y = 1000 e a equação acima citada (…).



(RT2)

Assim, nesta tarefa, o aluno tem tendência para utilizar a manipulação algébrica e só opta pela representação gráfica quando a primeira não lhe permite obter soluções. Em qualquer das situações, o aluno utiliza sempre a linguagem natural para descrever os seus raciocínios. Por vezes, quando solicitado a generalizar regras e procedimentos, complementa-a com notação simbólica.

Tarefa 3. O trabalho de grupo, nesta tarefa, começa pela análise do comportamento dos dados fornecidos no enunciado. Essa análise é feita com base em cálculos, que os alunos registam sem esquematização aparente e que lhes permite verificar se existe proporcionalidade directa entre os dados. Como não usam a representação gráfica, que pode facilitar a identificação de padrões no comportamento dos valores dados e permitir relacioná-lo com a selecção dos métodos de interpolação a aplicar para encontrar os resultados pretendidos, a exploração desta questão fica limitada à aplicação desses métodos de forma rotineira e sem compreensão. Os alunos apresentam os cálculos que efectuam durante a exploração desta questão, de forma organizada, em tabelas e aproveitam a organização que esta representação permite para facilitar a realização desses mesmos cálculos:

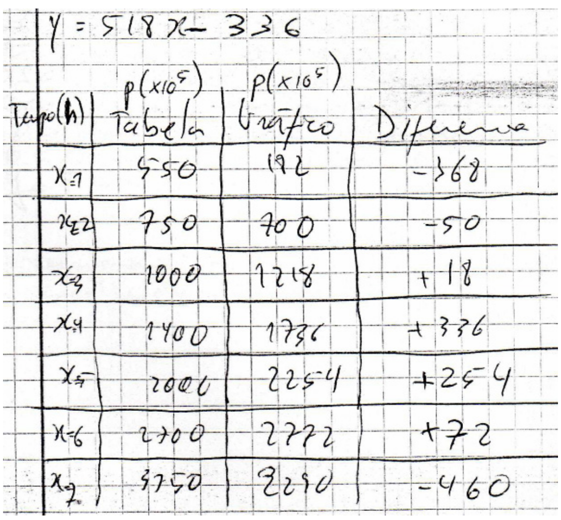

Para o posto 3

	x	f(x)	1ª dd	2ª dd	3ª dd	4ª dd
x_0	2	85	55	-1,667	7,084	-2,104
x_1	3	140	50	26,667	-5,542	
x_2	5	250	130	4,5		
x_3	6	380	220			
x_4	7	600				

(RT3)

A opção por este tipo de representação para apresentar e facilitar os cálculos, pode estar relacionada com a familiarização de procedimentos. De facto, nos manuais de Análise Numérica é usual a utilização deste tipo de tabela para exemplificar a aplicação dos métodos de interpolação polinomial e os alunos têm por hábito adoptá-la quando resolvem exercícios na sala de aula.

Quando, na questão seguinte desta tarefa, os alunos têm que seleccionar o melhor modelo matemático, entre três disponíveis, para representar um conjunto de dados, Luís propõe a utilização da máquina de calcular para obter o comportamento dessas três funções. No entanto, como explica durante a entrevista, não usa as potencialidades gráficas para analisar esse comportamento de forma eficiente mas apenas para obter "as imagens desses dados através das funções dadas" (E3) e compará-las através de cálculos: "Começámos por inserir as três funções na calculadora para podermos comparar os resultados obtidos da tabela com os resultados da calculadora" (E3). A trabalhar em grupo, os alunos baseiam as suas decisões em cálculos, que organizam e apresentam, novamente, em tabelas, de forma a permitir uma rápida comparação de valores, através de simples observação:


$y = 518x - 336$

Tempo(h)	p(x10⁵) Tabela	p(x10⁵) Gráfico	Diferença
x_1	550	182	-368
x_2	750	700	-50
x_3	1000	1218	+18
x_4	1400	1736	+336
x_5	2000	2254	+254
x_6	2700	2772	+72
x_7	3750	3290	-460

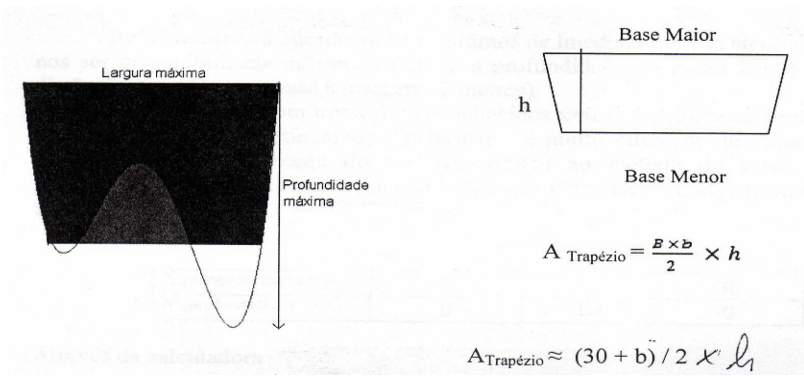
(RT3)

A tabela é, assim, a única representação a que Luís recorre nesta tarefa e utiliza-a para apresentar e organizar dados e para facilitar os cálculos que dominam o seu trabalho de exploração.

Tarefa 4. Na exploração desta tarefa, Luís começa por escolher a manipulação algébrica para encontrar a área da figura proposta no enunciado, com base nos métodos de integração e interpolação polinomial, já seus conhecidos. Depara-se, no entanto, com algumas dificuldades, como explica durante a entrevista: "Pensei… Temos pontos, vamos construir uma função, usando a calculadora com os pontos que nós temos. Pensei primeiro (…) associar a curva a uma função de Lagrange para calcular o integral. Mas não consegui encontrar a função porque não havia abcissas suficientes para isso" (E4).

Como esta estratégia não permite obter uma solução, o aluno e os seus colegas de grupo optam por utilizar figuras geométricas elementares como base para o cálculo aproximado da área da figura. Os alunos apresentam essas figuras e, com base nelas, descrevem os seus raciocínios e justificam as suas opções, usando linguagem natural:

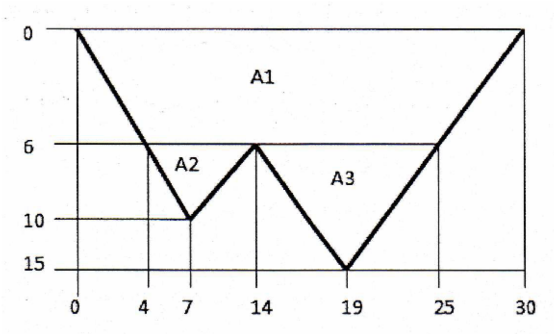
> Tentámos delimitar a secção através de polígonos regulares, o que nos permite achar uma área aproximada da figura representada. Deduzimos que a melhor figura seria um trapézio. (…) Obtivemos a altura do trapézio, calculando o valor médio da altura da secção, (…) a profundidade mínima é 6 metros e a máxima é de 15.



(RT4)

Os alunos referem ainda outras explorações, também baseadas em figuras geométricas e, apesar de na questão seguinte terem mais um dado disponível, continuam a explorar diferentes estratégias geométricas, cada vez mais complexas. Utilizam combinações de várias figuras geométricas elementares (rectângulos, triângulos e trapézios), sempre acompanhadas de uma explicação detalhada dos raciocínios e de todo o processo de cálculo, em linguagem natural:

> Pensamos em calcular apenas a área da secção, transformando em figuras geométricas nas quais já conhecemos as fórmulas para calcular a área. (…) Sendo assim, a área será o somatório das áreas calculadas. (…)

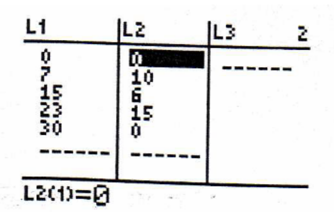


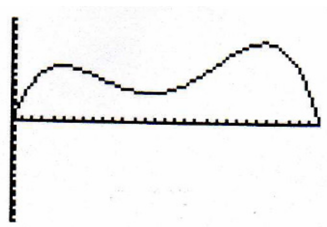
(RT4)

No seu trabalho de grupo, os alunos assumem alguns pressupostos, também com base nas figuras e justificam as opções tomadas usando linguagem natural: "Resolvemos atribuir pontos que nos permitissem calcular as áreas das figuras geométricas apresentadas. Decidimos traçar uma escala e atribuir valores nos pontos pretendidos, visto que já sabíamos qual era o valor máximo do comprimento e da largura (…)" (RT4).

Durante a entrevista, Luís considera que pode partir dos cinco pontos que já tem disponíveis e, recorrendo à máquina de calcular, obter, de forma eficiente, a área da figura com base na integração numérica e nos recentes conhecimentos de ajuste de curvas. Explica o processo em linguagem natural e apresenta a informação relativa à tabela de introdução de dados e ao gráfico da função ajustada que a máquina disponibiliza:

> Colocámos esses valores na máquina de calcular e obtemos uma função do 4.º grau. Para determinação da área o grupo decidiu calcular o integral da respectiva função recorrendo às capacidades da calculadora.





(E4)

Estas representações (tabela e gráfico) não são opções intencionais do aluno para servirem de base à exploração da tarefa. Utiliza-as apenas para mostrar os procedimentos que realiza na máquina de calcular.

Nesta tarefa, as figuras geométricas dominam o trabalho do aluno. Utiliza-as como base justificativa dos processos de cálculo que conduzem à obtenção de soluções e para mostrar os seus raciocínios. Estas figuras são sempre acompanhadas de descrições detalhadas, em linguagem natural, dos processos de raciocínio e de cálculo que o aluno desenvolve.

Na realização de tarefas de investigação

Tarefa 1. Nesta tarefa são fornecidos aos alunos alguns exemplos da utilização da regra da adição de intervalos de valores reais. Luís explica, na entrevista, como interpreta a informação disponível, procurando recordar-se de experiências anteriores semelhantes: "Como nunca tinha feito uma soma de intervalos associei logo à soma de vectores porque era a única coisa que era parecido com a soma de coordenadas" (E1). Na aula, o aluno propõe ao grupo a utilização dos seus conhecimentos sobre vectores como base para a exploração da tarefa: "Primeiramente pensei que a soma de vectores pode ser utilizada para resolver a soma de intervalos, visto que de acordo com as soluções encontradas nos exemplos ilustrados, verificamos que estes obedecem ao mesmo critério da adição de vectores" (E1). É com base na observação dos exemplos dados no enunciado e nas propriedades dos vectores que os alunos, a trabalhar em grupo, formulam uma primeira conjectura para a soma de intervalos: "Sendo o vector $\vec{U}(u_1, u_2)$ e o vector $\vec{V}(v_1, v_2)$, a soma destes vectores é feita de acordo com o seguinte modo: $\vec{U} + \vec{V} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$" (RT1). Consideram que a conjectura é válida para todos os valores reais e não sentem a necessidade de a testar ou justificar, provavelmente porque estão a aplicar um resultado já conhecido (a regra da adição de vectores). Encontram algumas dificuldades quando tentam formular conjecturas para outras operações porque o resultado da aplicação das regras dos vectores não se ajusta ao esperado, como explica Luís na entrevista:

> A subtracção não [apresenta dificuldades] porque coincidia com a adição. Mas já a multiplicação e a divisão constituíam problemas. A multiplicação de vectores podia-se fazer pelo produto externo ou o produto escalar. Visto que o resultado do produto escalar é um número e no entanto um intervalo é sempre representado por dois números, ou seja, o limite inferior e o limite superior. (E1)

O aluno também refere o produto externo como uma forma possível de multiplicação de vectores. No entanto, não o utiliza porque não se lembra desse procedimento. Além disso, o seu conceito de vector, mesmo sendo representado por duas coordenadas, não se ajusta ao recém-formado conceito de intervalo de valores reais, enquanto conjunto de valores:

> O produto externo… Também tem dois números, é verdade. Mas depois? De acordo com as regras do produto escalar eu tinha que pôr os números dos vectores numa matriz e depois resolver o determinante e depois… Já não sei, não me lembro. Mas depois como era intervalo tinha que colocar os outros números no meio, ou entre o limite inferior e superior e assim já não dá. (E1)

Neste caso, o aluno revela compreensão do conceito de intervalo e é capaz de utilizar este conhecimento para identificar erros e questionar a estratégia inicial, que abandona quando verifica que não o conduz à solução. Durante a entrevista, Luís explica, igualmente, que observa de novo os exemplos dados no enunciado e identifica o padrão que está subjacente à construção desses intervalos de valores: "Como vi que a soma… Com base nestes exemplos era somar *x* com *x* e *y* com *y* (…)" (E1).

Depois de identificado o padrão, os alunos, a trabalhar em grupo, formulam, correctamente, uma nova conjectura para a adição de intervalos e generalizam-na, de imediato, escrevendo a regra em notação simbólica: "Regra geral para a adição intervalar: $\forall_{X,\,Y} \in \Re$, $X + Y = [X_1, X_2] + [Y_1, Y_2] = [X_1 + Y_1, X_2 + Y_2]$" (RT1). No entanto, os alunos não testam nem justificam esta conjectura.

Para a subtracção, também formulam de forma correcta uma conjectura, com base em propriedades matemáticas dos números e das operações, como explica Luís, na entrevista: "[Para] a diferença pensei na operação inversa que foi introduzir o sinal negativo dentro do último intervalo e depois foi só somar utilizando a regra que tinha deduzido" (E1). No trabalho de grupo apresentam o processo de dedução da expressão geral da regra, através de manipulação algébrica:

$X = [X_1, X_2]$ $Y = [Y_1, Y_2]$

$X - Y = X + (-Y) = [X_1, X_2] + (-[Y_1, Y_2]) = [X_1, X_2] + [-Y_2, -Y_1] =$

$= [X_1 - Y_2, X_2 - Y_1]$ (RT1)

Os alunos não sentem a necessidade de verificar nem de justificar a validade da regra, possivelmente porque a obtiveram através de um processo dedutivo com base em propriedades matemáticas. Formulam, também, uma conjectura para a multiplicação de intervalos, por analogia com a regra da adição: “Para a multiplicação utilizamos o mesmo sistema que na adição. Multiplicamos os limites inferiores e os superiores dos dois intervalos: $[X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2] = [X_1 \times Y_1, X_2 \times Y_2]$” (RT1). Os alunos não apresentam qualquer tentativa de verificação ou justificação desta conjectura e, por isso, não identificam algumas limitações da regra. Deste modo, a exploração da tarefa fica incompleta. É Luís que, durante a entrevista, refina a conjectura, baseado no seu conceito de intervalo: “Esta multiplicação só funciona para $\Re_0^+$” (E1).

Luís considera a questão seguinte “mais simples” e explica como a interpreta, tendo por base os seus conhecimentos sobre funções:

> Tendo em conta a noção de imagem que aprendemos anteriormente sabemos que se tem uma função y igual ao $f(x)$. O y de acordo com as operações que eu faço na função. Se eu tenho um valor de x, eu tenho um valor de y que vai corresponder à imagem. Então eu considerei que a minha função y fosse igual a $f(x)$ e que dentro do intervalo $[x_1, x_2]$, independentemente dos valores de x_1 e x_2, eu teria uma imagem para o intervalo $[x_1, x_2]$ que era substituir os valores de x_1 e x_2. (E1)

Apesar desta interpretação ser correcta e poder facilitar a exploração da questão, os alunos, durante a realização da tarefa em grupo, aplicam directamente a regra da adição, deduzida na questão anterior, para calcular a imagem de um intervalo X através das funções $f(X) = X + X$ e $f(X) = 2X$, que, através de um processo dedutivo consideram serem expressões equivalentes:

$$f([X_1, X_2]) = [X_1, X_2] + [X_1, X_2] = [X_1 + X_1, X_2 + X_2] = [2X_1, 2X_2] =$$
$$= 2[X_1, X_2]$$

> Logo concluímos que $f(X) = X + X$ pode ser escrito na forma $f(X) = 2X$.
>
> Assim, $f([2, 7]) = [2, 7] + [2, 7] = [4, 14]$ (RT1)

Para obter uma expressão geral para a imagem de um intervalo através da função $f(X) = X^2$, os alunos continuam a aplicar as regras deduzidas anteriormente, neste caso a da multiplicação. Durante a entrevista, Luís mostra reserva em relação à conjectura formulada deste modo:

> Na verdade não tinha a certeza e pensámos… Mas acho que ainda não é certo, não tenho conhecimentos para… Dados para defender isso. O que nós fizemos foi, de acordo com a multiplicação, multiplicar duas vezes o X. Utilizámos a regra que deduzimos na questão anterior (…). (E1)

Perante estas dúvidas, o aluno formula uma nova conjectura e coloca a questão: "Porque é que não poderia fazer o limite inferior ao quadrado e o limite superior ao quadrado?" (E1). Neste caso, em que a função não é monótona, estas conjecturas só são válidas para valores positivos e não podem ser generalizadas tal como se apresentam. Embora o teste destas conjecturas não seja apresentado no trabalho de grupo dos alunos, o processo é realizado com base na experimentação de casos e permite-lhes concluir que não são válidas, como Luís explica, durante a entrevista: "Ao experimentar casos não dava o mesmo resultado de uma maneira e de outra" (E1). No entanto, o aluno não identifica os motivos que estão na base da refutação e dá por terminada a exploração da tarefa, que fica incompleta: "Não consegui organizar as ideias para chegar lá…" (E1).

Durante o trabalho de grupo, os alunos também formulam uma conjectura para a função $f(X) = e^X$: "Dada $f(X) = e^X$, sabe-se que se $X = [X_1, X_2]$ então podemos escrever f(X) da seguinte forma: $f(X) = e^{[X_1, X_2]} = \left[e^{X_1}, e^{X_2}\right]$" (RT1). No entanto, não explicam como o fazem nem apresentam qualquer tipo de verificação ou justificação.

Ao longo da exploração desta tarefa, Luís formula várias conjecturas baseadas em analogias, na identificação de padrões ou em processos dedutivos fundamentados em propriedades matemáticas. O aluno tem tendência para generalizar as conjecturas, de forma imediata, sem proceder à sua validação. Também não é visível qualquer tentativa para as justificar. Deste modo, as conjecturas formuladas nem sempre se apresentam correctas.

Tarefa 2. Os alunos, a trabalhar em grupo, começam por observar a sequência de intervalos dados no enunciado e procuram regularidades que lhes permita compreender o seu modo de formação. Identificam, correctamente, que o padrão de diminuição dos intervalos está relacionado com a sua amplitude e conjecturam, ainda que parcialmente: "Ao olharmos para a sequência verificamos que a amplitude dos intervalos vai diminuindo para metade relativamente ao intervalo anterior" (RT2). Com base na mesma observação, os alunos identificam outro padrão, desta vez relativo aos extremos dos intervalos e formulam outra conjectura, como explica Luís, durante a entrevista:

> Nestes três em que se mantinha o limite superior, era sempre o limite inferior que ia diminuir. Três vezes. Depois alterava e passava a ser o limite superior, duas vezes. Assim, para um caso genérico [a, b], o mínimo (a) varia de três em três intervalos enquanto que o máximo (b) tinha em dois intervalos seguidos o mesmo valor, e no intervalo a seguir a esses tinha outro valor diferente. (E2)

No entanto, a simples observação não é suficiente para identificar correctamente o modo de formação dos intervalos da sequência pois, deste modo, o aluno não utiliza toda a informação disponível e necessária para esse processo. Como não testa nem justifica as conjecturas, também não identifica os erros na sua formulação. Só quando induzidos a uma nova leitura, mais atenta, da informação disponível no enunciado é que Luís verifica, através de experimentação, que os intervalos construídos a partir das conjecturas formuladas, não satisfazem todas as condições do enunciado: "Só que a partir deste raciocínio verificamos que o valor da raiz de f(x) não estava contida em todos os intervalos" (E2). O aluno reformula a sua conjectura, relativa aos extremos dos intervalos, e explica: "Subtraímos sempre ao máximo e somamos sempre ao mínimo. Mas quando passasse… Quando o valor do máximo passasse a ser inferior ao valor da raiz, que encontrámos no gráfico, trocávamos, e somávamos ao mínimo. Fazemos sempre por comparação" (E2). O aluno procede à verificação desta conjectura, apenas para os intervalos da sequência apresentada no enunciado mas não a justifica, possivelmente porque não compreende (e não aprofunda) as razões que conduzem à decisão sobre o extremo do intervalo a diminuir.

Durante o trabalho de grupo, os alunos tentam generalizar as conjecturas formuladas, usando notação simbólica para formalizar o processo de formação dos intervalos descrito: "A partir do que foi dito anteriormente, podemos definir a seguinte regra: Se x - max > (f(x) = 0), então o intervalo seguinte será [min, x - max] ou [x + min, max] se e só se x-max < (f(x) = 0)" (RT2).

Na questão seguinte, Luís não tenta representar as relações entre as propriedades do intervalo, nomeadamente a amplitude, e a sua ordem na sequência, através de uma expressão algébrica. Deste modo, quando confrontado com a necessidade de encontrar a ordem correspondente a um determinado elemento de uma sequência, constrói todos os elementos da referida sequência, usando a regra deduzida: "Fizemos muitos intervalos e contámos esses intervalos" (E2). De facto, nesta sequência, os elementos pedidos eram facilmente enumeráveis um a um, e o aluno opta por esta estratégia.

Nesta tarefa, Luís formula as conjecturas apenas com base em alguns exemplos, nos quais identifica padrões. Estas conjecturas são generalizadas e assumidas como conclusões, de forma imediata, sem o aluno testar a sua validade ou experimentando apenas alguns casos. Aliada a esta tendência observa-se, também, que o aluno não procura explicações ou justificações que validem as suas conjecturas.

Tarefa 3. Os alunos, a trabalhar em grupo, começam a exploração desta tarefa calculando as diferenças entre os valores dados na primeira tabela, de forma a identificarem um padrão no seu comportamento. Com base nesses cálculos, conjecturam, correctamente, um comportamento linear para esses dados, como explica Luís durante a entrevista: "Ao olhar para a tabela do posto 1, (…) consegue perceber-se que [os valores da população de bactérias, p] é uma função linear. O declive é constante $\frac{140-90}{3-2}=\frac{240-140}{5-3}=\frac{390-140}{8-3}$" (E3). São os cálculos e a referência que o aluno faz ao declive que justificam a conjectura.

O aluno e os seus colegas de grupo formulam, também, uma conjectura sobre a estratégia a usar para encontrar os valores em falta, com base nos seus recentes conhecimentos de interpolação: "Pensamos que se poderia descobrir os valores em falta por um método de interpolação polinomial" (RT3). Durante a entrevista, Luís explica que utiliza a interpolação polinomial de Lagrange na construção de polinómios que, por sua vez, permitem encontrar os valores pretendidos. Refere ainda, que testa a conjectura comparando estes resultados com os que obtêm, também, através da regra de três simples: "Fomos fazer um problema de Lagrange, uma interpolação de Lagrange. Nós também fizemos com a regra de três simples para consultar se havia diferenças mas não, dava o mesmo" (E3). No entanto, não justifica a opção pela interpolação polinomial nem a escolha do método de Lagrange.

Durante o trabalho de grupo, os alunos também verificam, através do cálculo das diferenças entre os valores disponíveis, que a primeira conjectura formulada deixa de ser válida para as restantes tabelas, pois a relação linear anteriormente encontrada, deixa de existir:

> Para a tabela dos postos 2 e 3 tentámos aplicar o mesmo que para a 1. Mas:
>
> $$\frac{85-40}{2-1} \neq \frac{220-40}{4-1} \neq \frac{210-85}{5-2} \text{ e } \frac{600-250}{7-5} \neq \frac{380-140}{6-3} \neq \frac{140-85}{3-2}.$$
>
> Logo não são funções lineares (…). (RT3)

Não formulam, no entanto, qualquer conjectura sobre os novos comportamentos (uma vez que não os identificam) e mantêm a conjectura sobre os métodos de interpolação polinomial para encontrar os valores em falta: "Podemos utilizar um dos métodos aprendidos para interpolação polinomial. Pode utilizar-se quer o método de Newton com diferenças divididas quer o método de Lagrange" (RT3). A análise do trabalho que os alunos apresentam, indica que optam pelo método de Newton, talvez porque a sua utilização exige menos cálculos. Durante a entrevista, questiono Luís no sentido de justificar esta opção mas a resposta mostra que ela é tomada sem reflexão: "Era igual… Podíamos fazer por qualquer um. Alguém começou a tabela… Se calhar é mais fácil fazer os cálculos" (E3).

A escolha do grau do polinómio que os alunos constroem para interpolar os valores em falta, não está relacionada com o comportamento dos dados disponíveis mas depende apenas do seu número. A ideia de que quanto maior o grau do polinómio interpolador, melhor é a aproximação obtida para os valores a interpolar, domina as conjecturas de Luís: "Usamos os pontos todos. Poderíamos ter feito o método só com quatro pontos mas o erro seria maior" (E3). O aluno justifica as suas conjecturas sobre o grau dos polinómios, com base nos seus conhecimentos de interpolação. No entanto, como parte de premissas erradas e não testa as conjecturas, o aluno não se apercebe que nem sempre estas são válidas. Durante a entrevista, o aluno explica que, seguindo o raciocínio que usa na formulação das conjecturas anteriores, depois de ter interpolado um valor, pode acrescentar esse novo dado aos que já tinha e, assim, construir um polinómio de grau superior: "Para descobrir o valor de $t = 6$ [no posto 2] poderíamos agora incluir o valor de p(3) que acabámos de descobrir e assim o erro era menor" (E3). Desta forma, o aluno é capaz de refinar as suas conjecturas.

O trabalho de grupo, na questão seguinte, começa com o cálculo das imagens dos valores dados, através de cada uma das funções propostas, com o objectivo de obter alguma informação sobre esses modelos. Para isso, recorrem à máquina de calcular, como meio auxiliar dos cálculos e a tabelas para organizar a informação. Quando têm que seleccionar um dos modelos, os alunos procuram um critério objectivo para apoiar a decisão. Com base nas diferenças calculadas e no conceito de erro, formulam uma conjectura: "O melhor modelo é o que apresenta as menores diferenças em módulo" (RT3). Luís explica, durante a entrevista: "Com base nestas tabelas (…) chegamos à conclusão que é a função $y = 82x^2 - 139x + 150$. Isto porque o módulo da diferença é o mais pequeno" (E3). Em nenhuma destas situações, o critério é explicitado de forma clara, no entanto, pela análise do trabalho dos alunos, é visível que optam pelo modelo cuja soma total dos módulos é menor, e não pelo que apresenta o menor erro individual, valorizando a totalidade dos erros em relação aos afastamentos individuais. O aluno considera, ainda, que a conjectura pode ser refinada para abranger as situações em que haja mais do que um modelo com o mesmo erro total: "Caso houvesse módulos de soma do erro iguais para duas funções, a que melhor aproximava seria a função que tivesse erros positivos e negativos e não só positivos ou negativos" (E3). O aluno revela, assim, que é capaz de, intuitivamente, construir um critério que é a base do método dos mínimos quadrados, cuja complexidade dificulta, habitualmente, a sua compreensão.

Luís, nesta tarefa, formula várias conjecturas, maioritariamente baseadas na identificação de padrões e nos cálculos que realiza com esse objectivo. No entanto, já se nota uma preocupação em testar e justificar algumas dessas conjecturas, com base em cálculos e propriedades matemáticas. Por diversas vezes, o aluno, também refina as suas conjecturas.

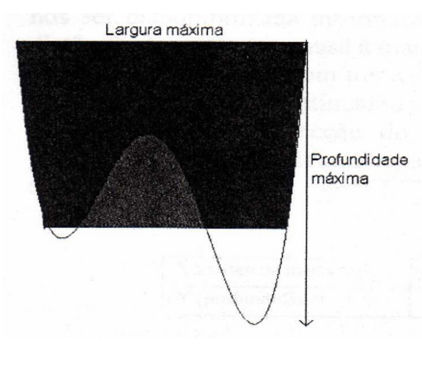
Tarefa 4. Luís não tem dificuldades em compreender o enunciado desta tarefa mas considera-a "complexa porque há vários caminhos mas na maioria não conseguimos obter soluções porque não eram dadas funções e os pontos eram escassos" (E4). O aluno explica, na entrevista, que o trabalho de grupo contempla a formulação de várias conjecturas, embora não simultâneas, sobre o valor da área da figura representada no enunciado, tendo para isso utilizado figuras geométricas e conhecimentos matemáticos recentemente adquiridos na disciplina: "Na elaboração deste trabalho foram discutidas várias ideias utilizando como referência figuras geométricas conhecidas e também utilizando os conhecimentos matemáticos adquiridos em Análise Numérica" (E4).

Na primeira exploração, os alunos a trabalhar em grupo, conjecturam que a área aproximada da figura corresponde ao valor do integral da função que representa a figura do enunciado. Esta conjectura tem por base a analogia que os alunos fazem com outros exercícios em que o valor das áreas é obtido, essencialmente, através do cálculo integral. No entanto, deparam-se com algumas dificuldades quando verificam que não têm dados suficientes, como descreve Luís, durante a entrevista:

> Luís: Na primeira abordagem associamos a curva de profundidade a uma função desconhecida e, através dos nossos conhecimentos matemáticos, adquiridos anteriormente, fazemos um integral desta curva e subtraímos à área do rectângulo. Pensámos primeiro ir buscar uma função de Lagrange, associar a curva a uma função de Lagrange para se calcular o integral. Se conseguíssemos ter a função fazíamos $\int_0^{30} L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + \ldots$
>
> Prof.ª: Qual a função em que pensaram?
>
> Luís: Uma função do 4.º grau, olhando para a figura. Nós pensámos, temos pontos, vamos construir uma função usando a calculadora com os pontos que nós temos. Mas não conseguimos encontrar a função porque não havia abcissas suficientes para isso.

Quando verificam que, deste modo, não obtêm um resultado, o aluno e os seus colegas formulam novas conjecturas sobre o valor aproximado da área da figura, com base em figuras geométricas: "Tentámos delimitar a secção através de polígonos regulares, o que nos permite achar uma área aproximada da figura representada" (RT4). Os alunos justificam a conjectura com base em figuras que apresentam no seu trabalho de grupo, como a do exemplo seguinte:

> Pensámos em igualar a área toda a um trapézio e calcular a área do trapézio. Através da observação da secção deduzimos que a área excedente irá compensar de alguma forma a área em falta dentro do trapézio. Obtivemos a altura do trapézio, calculando o valor médio da altura da secção (…).



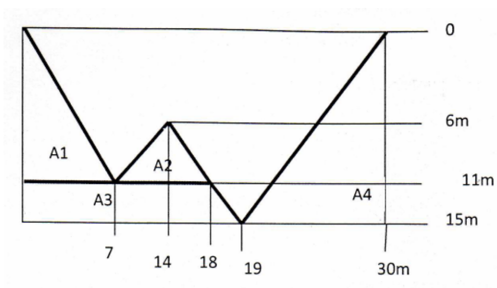
(RT4)

Na entrevista, Luís refere uma outra conjectura, também baseada em figuras geométricas, que explica ser a mais elementar e a que apresenta maior erro: "[Este] método é mais simples e com certeza o que terá maior índice de erro. Foi efectuar o cálculo da área de um rectângulo, visto que tínhamos a largura máxima da secção transversal do rio e também tínhamos a profundidade máxima da mesma" (E4). Contudo, como explica, estas conjecturas são válidas só para os dados conhecidos: "Esforçámo-nos para obter a área da secção tendo em consideração unicamente a informação disponibilizada" (E4).

Os alunos, a trabalhar em grupo, continuam a explorar a segunda questão de forma semelhante ao que fazem na primeira, apesar de terem mais um dado disponível. Luís refere, na entrevista: "Mesmo assim, com mais um valor conhecido, continuamos a pensar que é muito difícil definir uma função que traduza fielmente a secção do rio. Mas poderíamos pensar de forma semelhante às soluções já apresentadas" (E4).

Com base nas figuras geométricas e no sentido de obterem soluções cada vez mais aproximadas da área da figura dada, os alunos refinam as conjecturas formuladas anteriormente, durante o seu trabalho de exploração na sala de aula. Assim, conjecturam que a área da figura dada no enunciado pode ser obtida através da soma das áreas de várias figuras geométricas elementares cujas áreas são conhecidas e mais fáceis de calcular (rectângulos, triângulos e trapézios). Os alunos justificam a conjectura com base na figura que apresentam e explicam quais os pressupostos que têm que assumir quando não têm dados suficientes:

> Como não se tratava de uma figura simples, então ajustamos figuras cuja expressão da área é conhecida. Então teríamos: $A_{max} - (A_1+A_2+A_3+A_4)$, onde A_{max} é a área do rectângulo. Então resolvemos atribuir pontos que nos permitem calcular as áreas das figuras geométricas apresentadas. Decidimos traçar uma escala e atribuir valores nos pontos pretendidos visto que já sabíamos qual era o valor máximo do comprimento e da largura, e também tínhamos a profundidade no ponto D que era 6 metros.



(RT4)

É o que explica Luís na entrevista: "Na segunda questão foi o que fizemos. Basicamente, associámos a figura do enunciado a várias figuras geométricas conhecidas e com os pontos que já tinham sido dados, calculamos a área dessas figuras e a área total seria a soma dessas figuras todas" (E4). Ainda durante a entrevista, o aluno recupera a primeira conjectura formulada pelo grupo pois considera-a válida nas condições dos pressupostos assumidos. Opta por recorrer à máquina de calcular para obter uma função que represente a figura dada no enunciado, como explica: "Colocamos um referencial e associamos valores para as abcissas e vamos buscar as imagens. Como já tínhamos à nossa disposição cinco pontos, colocamos esses valores na máquina de calcular para efectuarmos um ajuste de curvas e obtemos uma função do 4.º grau" (E4). Justifica a escolha da função com base na análise da figura e em propriedades matemáticas: "A secção do rio apresenta 3 concavidades e tínhamos à nossa disposição cinco pontos" (E4). Depois, obtém a área da figura através de cálculo integral, utilizando a máquina de calcular: "Para determinação da área pode-se calcular o integral da respectiva função recorrendo às capacidades da calculadora" (E4).

No seu trabalho de grupo, os alunos não respondem à última questão porque consideram que não têm dados suficientes. Luís justifica a ausência de resposta, durante a entrevista: "Dissemos que não podíamos quantificar porque… Para quantificar, tínhamos que ter os valores correctos. Apesar de termos um valor aproximado, não temos o valor verdadeiro, pelo que não é possível calcular o erro" (E4). O aluno está focado no conceito de erro verdadeiro e a sua utilização, neste caso, não é possível. Como não utiliza toda a informação dada sobre os erros, não formula qualquer conjectura sobre eles. Durante a entrevista, através de questionamento, tento que o aluno compreenda a utilização dos diferentes conceitos de erro que conhece e que os aplique nesta tarefa. Luís recorda-os com facilidade e conjectura, correctamente, que pode quantificar os erros comparando as diferentes estratégias que usa: "Para acharmos o valor da área tivemos que associar vários valores aproximados que já induzia a vários erros e quantificar esse erro como um erro verdadeiro seria bastante difícil. Então, neste caso, podemos achar um erro em relação aos métodos que nós usámos" (E4). Apesar disso, não justifica a conjectura indicando, por exemplo, os conceitos de erro que pode usar.

As figuras geométricas são, assim, a base do trabalho desenvolvido pelo aluno. Utiliza-as, juntamente com algumas propriedades matemáticas, para formular conjecturas que são, sucessivamente, refinadas. Além disso, Luís usa as figuras geométricas como base do processo de justificação de conjecturas, já frequente nesta tarefa.

Na resolução de problemas

Tarefa 1. Após a leitura do enunciado, Luís tem dificuldade em interpretar o problema, como refere na entrevista: "Foi uma questão complicada e não cheguei a perceber bem, teve que ser o Francisco [um colega do grupo] a pensar. Foi uma questão de interpretação" (E1). Ainda durante a entrevista, explica a sua interpretação da informação disponibilizada e considera que as suas dificuldades estão relacionadas com a aplicação dos seus conhecimentos recentes, ainda pouco consolidados, na resolução do problema:

> Eu depois percebi o que era para fazer, mais ou menos… Dividimos por d e deu um erro e dividimos por c e deu outro. Temos que dividir agora o d pelo c mas não sei como encontrar o erro exacto. Eu acho que existe uma fórmula e eu não sei… Não sei como é que a partir dos erros… (E1)

No entanto, a dificuldade parece estar em dar sentido à informação disponível no enunciado e em expressá-la em termos intervalares para depois poder aplicar os conhecimentos recentes que refere.

O trabalho em grupo também reflecte estas dificuldades. Os alunos estabelecem um plano inicial no qual optam por estimar o erro final, associado ao valor aproximado da divisão entre dois valores, através da comparação com os seus erros individuais. Uma vez decidida a estratégia, os alunos efectuam o cálculo da divisão entre os dois valores aproximados dados no enunciado do problema e, através de uma regra de três simples, calculam o erro associado a esse resultado, comparando-o com os erros de cada um dos factores dessa divisão. Registam todos os cálculos usando uma disposição habitual de cálculo e descrevem-nos numa linguagem natural:

> Dividimos as duas unidades (d) por 1,2 (c) e encontramos o valor 1,6 e com a regra de três simples encontramos o erro associado. Vimos que se para dois o erro era de 0,1 então para 1,6 quanto é que dá. E fizemos para 1,2 quanto é que dava e vimos o menor.

$\frac{2}{1,2} = 1,6$ $\quad$ $2 — 0,1$

$1,6 — x$

$x = 0,08 \Rightarrow x = \pm 0,08$ (RT1)

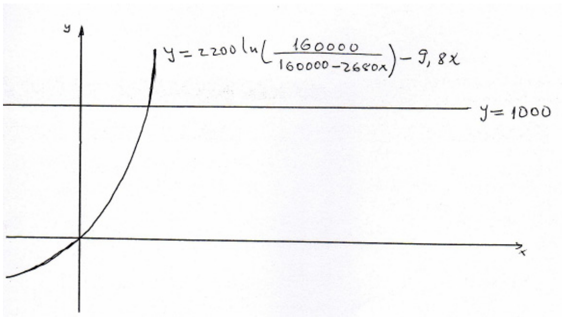
Os alunos não verificam os cálculos nem justificam as opções tomadas. É durante a entrevista que Luís explica a opção pelo menor valor do erro mas não dá uma justificação fundamentada: "Escolhemos esse erro para a margem de erro ser menor" (E1). O aluno também refere que, durante o trabalho em sala de aula, propõe um plano de resolução alternativo que consiste em estimar o erro final a partir da divisão dos dois erros dados no enunciado: "Pensei em dividir o primeiro erro pelo segundo" (E1).

A trabalhar em grupo, os alunos executam os cálculos e apresentam o resultado, sem justificar esta opção: "Ao dividir os dois erros, obtemos o seguinte: $d_e/c_e = 0,1/0,02 = \pm 5$" (RT1). Depois dão por terminada a resolução do problema sem darem uma resposta. Não interpretam os resultados obtidos nem reflectem sobre as diferenças significativas que existem entre as soluções encontradas através das duas estratégias que usam: "Visto não termos chegado a um consenso, resolvemos mostrar ambos os resultados" (RT1).

Nesta tarefa, o aluno mostra algumas dificuldades na interpretação do problema mas, depois de as ultrapassar com a ajuda dos colegas de grupo, é capaz de estabelecer um plano e utilizar as estratégias adequadas para o executar e encontrar uma solução. No entanto, não responde ao problema e não verifica os cálculos nem os resultados. No final, também não procura outra forma de resolver o problema.

Tarefa 2. O trabalho de grupo inicia-se com a leitura individual do problema. Os alunos identificam facilmente os dados e a questão. Por analogia com a primeira questão desta tarefa, os alunos classificam o problema como sendo a resolução de uma equação não linear e, deste modo, seguem os mesmos passos que usam na exploração dessa questão. Assim, começam por planear a resolução analítica da equação e tentam, sem sucesso, isolar a variável através de manipulação algébrica, como explica Luís, durante a entrevista: "Pensámos porque era mais parecido com a questão um. É exactamente o mesmo problema, tentámos isolar a variável e não conseguimos" (E2). Ao verificar que a execução deste plano não lhe permite obter uma solução, Luís sugere um novo plano, baseado na representação gráfica da equação e na utilização das capacidades da máquina de calcular para encontrar uma solução aproximada: "Decidimos então recorrer à capacidade da máquina gráfica" (E2). Para a execução deste plano, os alunos, a trabalhar em grupo, consideram um problema equivalente, cuja resolução soluciona o problema inicial. Assim, começam por substituir as variáveis da equação pelos seus valores e trocar as letras que representam as incógnitas para x e y, por estarem mais familiarizados com esta notação. Com o auxílio da máquina de calcular, representam graficamente as expressões matemáticas que se encontram em cada membro da equação e procuram o ponto de intersecção entre elas:

> Traçamos a recta $y = 1000$ que corresponde ao valor da velocidade para a qual queremos o tempo que se demora a atingir. Fizemos a seguir a intersecção da recta $y = 1000$ e a equação acima citada (…).



(RT2)

Este trabalho requer uma base de recursos, envolvendo o conhecimento de conceitos e propriedades matemáticas (relacionados com funções, por exemplo) e a familiarização com procedimentos de rotina (de resolução de equações), que Luís parece ter. A resposta ao problema é correcta mas o aluno não verifica a solução encontrada, talvez por considerar que o valor está de acordo com o esperado. Durante a entrevista, ainda faz referência a outra forma de resolução por tentativa e erro, reflecte sobre a eficiência das estratégias e considera a resolução gráfica melhor: "Uma outra forma de resolver o problema seria ir atribuindo valores a *t*, no entanto, decidimos recorrer às capacidades gráficas da calculadora devido ao facto de a margem de erro apresentada por esta ser muito menor do que aquela que seria de esperar se for calculado a partir da atribuição de valores à variável *t*" (E2).

Luís tem facilidade em interpretar o problema e em identificar os dados. Revela, também, ser capaz de estabelecer um plano e utilizar as estratégias adequadas para o executar. Quando verifica que o plano não o conduz à solução pretendida, o aluno volta atrás e propõe um novo. No final responde correctamente ao problema mas não verifica os cálculos nem o resultado. Além disso, procura estratégias alternativas e reflecte sobre a sua eficiência.

Tarefa 3. Luís depara-se com algumas dificuldades na interpretação do problema porque, como explica, "há diferentes valores de tempo para a mesma voltagem" (E3). O aluno considera que os dados fornecidos não podem ser elementos de uma função, uma vez que contrariam o seu conceito e, assim, tem dificuldade em dar sentido ou contextualizar a informação disponível de forma a utilizá-la. Esta dificuldade é comum a todos os elementos do grupo e suscita, entre eles, bastante discussão. Para ultrapassá-la, planificam uma estratégia que passa por simplificar o problema original, reduzindo os dados para os adaptar ao seu conceito de função. Durante a fase de execução, os alunos calculam as médias dos tempos para cada um dos valores das voltagens e reduzem os dados a quatro valores. Registam os cálculos e usam uma tabela para apresentar os valores encontrados para as médias:

$Med_{110} = (2145 + 2155 + 2225) / 3 \Rightarrow Med_{110} = 2175$ (…)

	Média 110	Média 115	Média 120	Média 130
110 Volts	2175			
115 Volts		2196		
120 Volts			2297	
130 Volts				2340

(RT3)

Os alunos não utilizam os valores encontrados para continuar a resolução do problema e dão por terminado o seu trabalho de grupo sem responderem à questão, possivelmente porque têm dificuldade em interpretá-la e, desse modo, não identificam uma estratégia que conduza à solução. Durante a entrevista, Luís observa os valores obtidos e identifica uma tendência crescente no valor das médias à medida que o valor da tensão também aumenta. O aluno responde ao problema de forma descritiva e incompleta e interpreta a solução no seu contexto:

> A única relação que conseguimos estabelecer é que quanto maior for a voltagem maior é a probabilidade de a máquina aguentar sem falhar. Entre as medições efectuadas com 110 e 115 volts, o tempo decorrido até à falha é bastante similar mas aumenta ligeiramente com o aumento da voltagem. Para a voltagem de 120 e 130, o aumento é mais acentuado, o que nos permite concluir que as máquinas têm um tempo útil de vida maior se trabalharem com voltagens compreendidas entre 120 e 130 volts. (E3)

No entanto, não explora a possibilidade de usar outras estratégias para chegar ao resultado nem faz qualquer tentativa de quantificar a relação entre as duas variáveis ou de a descrever formalmente através de modelos matemáticos que já conhece.

Nesta tarefa, Luís revela algumas dificuldades na interpretação dos dados e da questão do problema proposto. Apesar da estratégia que usa para simplificar o problema, as dificuldades mantêm-se ao longo do processo de resolução e o aluno dá uma resposta incompleta ao problema, sem fazer qualquer tentativa de exploração de estratégias alternativas.

8.3. Aprendizagens do aluno em Análise Numérica

A realização das tarefas propostas, permite abordar diversos tópicos programáticos e promover, nos alunos, aprendizagens significativas ao nível de conceitos e procedimentos de Análise Numérica, como salienta Luís durante a entrevista: "O ponto positivo é que aprendi mais" (E5).

Um dos tópicos abordados nesta disciplina é a análise de erros, que é um tema transversal a todo o programa. Os conceitos de valor aproximado e de erro são fundamentais para o trabalho a realizar nos outros tópicos e Luís mostra que os compreende pois utiliza-os, de forma correcta, tanto nas várias tarefas como nos momentos de avaliação (testes e exame final). Por exemplo, na tarefa 2, o aluno é capaz de relacionar estes dois conceitos: "Se é um número aproximado, tem que ter uma margem de erro. Para a encontrar usámos a regra que tínhamos dado de meia unidade da sua ordem de grandeza" (E2). Este procedimento também é correctamente utilizado no primeiro teste e no exame, quando o aluno associa erros aos valores aproximados dados no enunciado: "$a = 10{,}3 \pm 0{,}05$ e $b = 1{,}32 \pm 0{,}05$" (Ex).

Estes conceitos estão associados ao conceito de intervalo que Luís também parece compreender. Na tarefa 1, o aluno recorre ao conceito de intervalo para confirmar algumas regras da aritmética intervalar, como explica na entrevista: "Tinha em mente que o resultado da soma de qualquer elemento de cada um dos intervalos tinha que pertencer ao intervalo que era obtido como soma dos dois intervalos" (E1). No primeiro teste, opta por representar num intervalo os dados do problema que lhe são apresentados através dos seus valores aproximados e respectivos erros, revelando ser capaz de relacionar esses conceitos. Depois disso, o aluno ainda utiliza as regras da aritmética intervalar, correctamente, para encontrar uma solução (embora tenha confundido a área com o perímetro), evidenciando aprendizagens também a este nível:

$L = 150 \pm 0.75 \Leftrightarrow L = [149.25, 150.75]$

$P = 200 \pm 1 \Leftrightarrow P = [199, 201]$

$S_1 = [149.25, 150.75] \times [199, 201] = [29700.75, 30300.75]$ (T1)

Luís é capaz, igualmente, de identificar de forma correcta as fontes de erro e tem a preocupação de escolher estratégias de resolução de forma a minimizar os erros, como é visível nas últimas tarefas e nos testes de avaliação:

> Sim, isso podia, mas acho que nesse caso estaria associado um erro maior e assim dava mais próximo. Porque quanto mais próximos [os pontos a utilizar] estiverem do valor a interpolar menor é o erro. Quanto mais afastados do valor a interpolar maior é o erro. (E3)

> De acordo com os métodos utilizados na resolução do problema, chegamos à conclusão que o erro varia de acordo com os ajustes feitos (…). O que melhor se ajustar (…) terá um erro menor. (E4)

> Para interpolar o valor de f(0,45) devemos escolher os nós mais próximos de modo a obter uma aproximação com o menor erro possível. Sendo assim, de modo a minimizar o erro, vou escolher os seguintes nós: (…). (T2)

Além disso, o aluno conhece e é capaz de seleccionar adequadamente, a forma de calcular o valor do erro associado às soluções obtidas, consoante o método que aplica. Por exemplo, no segundo teste, calcula o erro associado à interpolação polinomial da seguinte forma: “Para calcular o erro preciso de um polinómio do quarto grau, para depois fazer a diferença com o do terceiro já calculado” (T2). E explica, para o caso da integração numérica: “O erro total será igual à soma dos erros correspondentes às fórmulas aplicadas (…)” (T2).

O aluno ainda reconhece que é capaz de, intuitivamente, construir e utilizar conceitos e procedimentos não trabalhados, desempenhando, assim, um papel importante no seu processo de ensino-aprendizagem:

> Aprendemos porque nós podemos fazer coisas que… Podemos dar resultado a coisas que resultaram da nossa imaginação. Podemos criar fórmulas que existem mas que não sabemos e sem saber chegámos a esses resultados. E assim conseguimos fazer coisas que não sabíamos que éramos capazes. (E3)

Esta capacidade é notória, por exemplo, na tarefa 3, quando o aluno constrói um critério para seleccionar o melhor modelo para descrever o comportamento de um conjunto de dados, com base nas diferenças entre os valores experimentais dados e os valores obtidos com os diferentes modelos matemáticos que explora. O modelo que apresenta as menores diferenças, a que o aluno chama erros, é considerado o melhor: "Podemos concluir que o modelo que mais se aproxima é o primeiro modelo, pois possui mais valores próximos dos iniciais" (E3). Este procedimento é a base do método dos mínimos quadrados, usado para efectuar ajustes de curvas e que Luís evidencia ter compreendido quando o utiliza, correctamente e de forma reflectida, nos momentos de avaliação. No segundo teste, quando solicitado a encontrar os parâmetros do modelo de potência que representa um conjunto de dados disponibilizados no enunciado, o aluno lineariza a expressão do modelo, através de manipulação algébrica e aplica as fórmulas da regressão linear com os dados modificados (depois de aplicar logaritmos):

> Com base no processo de linearização temos:
>
> $Y = \mathrm{A}x^{\mathrm{B}} \Leftrightarrow \ln Y = \ln\mathrm{A} + \mathrm{B}\ln x$, em que lnA é a ordenada na origem e B é o declive. De acordo com as seguintes fórmulas:
>
> $\mathrm{B} = \dfrac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$ e $\mathrm{A} = \bar{y} - \mathrm{B}\bar{x}$ preciso dos valores de ln$y$ e ln$x$ para calcular as constantes acima referidas. (…). (T2)

No exame final, o aluno já escolhe o modelo a ajustar aos dados disponibilizados no enunciado com base na observação do seu comportamento (para a qual utiliza a máquina de calcular) e volta a aplicar o método dos mínimos quadrados de forma correcta: "Com base no gráfico observado na calculadora, o modelo que melhor se ajusta aos dados é uma recta (…)" (Ex).

A realização das tarefas propostas permitem, ao aluno, mobilizar os conhecimentos adquiridos e aplicá-los a novas situações. A interpolação polinomial, por exemplo, é um tópico programático apresentado aos alunos em aulas expositivas e de resolução de exercícios. Apesar disso, na tarefa 3, o aluno utiliza os métodos de interpolação polinomial para encontrar os valores em falta nas tabelas fornecidas: "Fomos fazer uma interpolação de Lagrange. O de Lagrange do primeiro grau porque nós temos dois buracos aqui para preencher (…)" (E3). Também na tarefa 4, é visível a utilização destes conceitos e procedimentos recém-adquiridos. Durante a realização desta tarefa, Luís recorre várias vezes à interpolação polinomial e ao ajuste de curvas para obter soluções: "Pensámos primeiro em ir buscar uma função de Lagrange, associar a curva a uma função de Lagrange para se calcular o integral. Mas depois colocámos esses valores na máquina de calcular e obtivemos uma função do 4.º grau" (E4). As respostas do aluno, às questões relacionadas com a interpolação polinomial que surgem nos momentos de avaliação, estão geralmente correctas e revelam que Luís compreende os procedimentos e as condições necessárias para a sua aplicação. Por exemplo, no primeiro teste, o aluno é capaz de seleccionar o método de interpolação mais adequado e aplica-o correctamente:

> Como 1.4 está entre 1.3 e 1.5, vou fazer uma interpolação entre estes valores para calcular f(1.4). Para calcular o polinómio de grau 3 precisamos de 4 pontos que serão os mais próximos do valor a interpolar. Utilizando a interpolação de Lagrange:
>
> $$L_0(1.4) = \frac{(1.4-1.5)(1.4-1.6)(1.4-1.2)}{(1.3-1.5)(1.3-1.6)(1.3-1.2)} = 0.666\ (\ldots)$$
>
> $p_3(1.4) = 0.666\times1.994 + 0.660\times2.117 - 0.154\times2.356 - 0.166\times1.552$. (T1)

Luís reconhece, por diversas vezes, as potencialidades deste tipo de tarefas para facilitar a aprendizagem dos métodos numéricos abordados e para desenvolver a compreensão das razões que estão por trás da sua construção:

> A tarefa é uma mais valia porque mesmo antes de nós sabermos quais as regras adequadas para resolver os exercícios, vamos pensando e depois quando a professora nos ensina a regra já é mais fácil, já temos a ideia… Compreendemos melhor assim. Além disso, mantém-se mais, estamos a trabalhar nisso e está todo o pessoal a pensar como é que se faz e depois não esquece. A mais valia é nesse aspecto. (E2)

> Em termos de conteúdos, [a realização das tarefas] ajudou a perceber melhor os conteúdos que já tínhamos dado. (E4)

O aluno refere, igualmente, a importância da realização das tarefas na compreensão e aprendizagem de conceitos e procedimentos relacionados com vários tópicos programáticos anteriores: "Esta tarefa, por exemplo, permitiu compreender melhor a regra dos mínimos quadrados e do ajuste de curvas. Aprendi também que posso quantificar o erro mesmo quando não tenho os valores verdadeiros" (E4).

No entanto, para o aluno, a aquisição de conhecimentos de Análise Numérica não é o mais importante do processo de aprendizagem. Como ele próprio refere: "O ponto positivo é que aprendi mais mas não só da matéria, outras competências… Estas tarefas estimulam muito o intelectual das pessoas" (E5). Apesar de não especificar quais são estas competências, a resposta seguinte parece indicar que são ao nível dos processos de raciocínio e da sua justificação. O aluno parece ter compreendido as características deste tipo de tarefas e refere, ainda, que sente uma evolução ao nível dos processos por ele vividos na exploração das tarefas de investigação: "Num exercício normal eu limito-me a dar o valor e isso. Aqui eu tenho que explorar, dizer o porquê e o que pensei para chegar aquele valor. Agora já sabemos o que temos que fazer, como temos que pensar e isso… Acho que as notas não dizem muito isso, mas evoluímos" (E4).

De facto, as classificações do aluno nos momentos de avaliação parecem não reflectir as aprendizagens realizadas. No primeiro teste, Luís tem um desempenho muito fraco (classificação de 7 valores). O aluno não responde a uma grande parte das questões (algumas porque não tem tempo para o fazer) e as que responde apresentam muitos erros de cálculos que conduzem a soluções erradas ou não permitem mesmo chegar a um resultado. No entanto, é de salientar o cuidado que o aluno tem em justificar alguns dos seus raciocínios, geralmente com base em teoremas e propriedades matemáticas, e o facto de ser o único aluno a incluir quantificadores na sua escrita simbólica, quando o faz. Os excertos seguintes são disso exemplo:

> Vou tentar transformar $4x^2 - e^x = 0$ em $x = 0{,}5e^{x/2}$.
>
> Então, $4x^2 - e^x = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = e^x \Leftrightarrow (\ldots) \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}e^x} \Leftrightarrow x = 0{,}5e^{x/2}$, de acordo com as propriedades da potenciação: $\sqrt[n]{\frac{a^b}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a^b}}{\sqrt[n]{c}} = \frac{a^{b/n}}{\sqrt[n]{c}}$. (T1)
>
> $f'(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{e^x}{8}, \ \forall_x \in [0,1]$
>
> Para $f''(x) \neq 0$ então $e^x = 8 \Leftrightarrow x = \ln 8 \notin [0,1]$. (T1)

No segundo teste, Luís melhora a sua classificação (12 valores) pois as suas respostas são maioritariamente correctas e bastante completas. Já justifica quase todos os seus raciocínios e respostas e revela ter os conhecimentos necessários de Análise Numérica para resolver os exercícios propostos. No entanto, não tem tempo para resolver os problemas propostos (as duas últimas questões do teste) e isso influencia a sua classificação. Como a média das classificações obtidas nos testes é inferior a 12 valores, segundo os critérios de avaliação definidos pela Escola Naval, o aluno tem que realizar um exame final onde obtém a classificação de 12 valores. Mais uma vez, o aluno apresenta dificuldades em realizar o exame no tempo determinado e opta por resolver os exercícios, que estão geralmente correctos, em detrimento dos problemas nos quais revela algumas dificuldades. Parece, pois, que o aluno realiza aprendizagens significativas ao nível dos conceitos e procedimentos da disciplina mas que os processos associados à resolução de problemas ainda precisam de ser mais trabalhados.

A motivação e empenho dos alunos na realização das tarefas propostas é outro aspecto que Luís realça como positivo e que pode facilitar a aprendizagem: "O curso todo, não só o meu grupo, mas o curso todo. Vejo um empenho de todos a trabalhar na tarefa aqui. Quando há uma tarefa está tudo a trabalhar para a tarefa. Não vejo ninguém a borrifar-se para isso" (E2).

8.4. Síntese

Uso de diferentes representações. Luís tem tendência para privilegiar a representação algébrica na exploração das tarefas propostas, mesmo quando conhece e tem à sua disposição outras representações que permitem abordagens mais eficientes. Opta por usar a manipulação algébrica em todas as tarefas, para deduzir regras ou para encontrar soluções. Algumas vezes, a utilização da representação algébrica não é adequada porque não permite identificar padrões no comportamento de valores numéricos que facilitem a selecção de métodos de resolução mais eficientes nem detectar conflitos e erros nas soluções obtidas pelo aluno. Deste modo, e como não usa outro tipo de representação que permita corrigir os resultados, as respostas obtidas com base na representação algébrica nem sempre estão correctas. Só quando a representação algébrica não lhe permite obter respostas é que o aluno recorre a outras formas de representação, como os gráficos ou as figuras geométricas.

A representação gráfica tem uma presença muito reduzida no trabalho do aluno. Luís só a utiliza na tarefa 2, para encontrar a solução de equações não lineares, quando o seu emprego é naturalmente sugerido pelo facto da manipulação algébrica ser inadequada para a sua resolução. Para isso, utiliza a máquina de calcular e as suas potencialidades como uma ferramenta auxiliar para desenhar os gráficos das funções e para obter soluções de forma eficiente, sem realizar cálculos. Neste caso, mostra competência no uso deste tipo de representação pois interpreta correctamente os gráficos e os resultados obtidos. No entanto, nunca usa a representação gráfica para analisar e desenvolver compreensão sobre valores numéricos ou para testar resultados.

À semelhança do que acontece com a representação gráfica, Luís só utiliza as figuras geométricas quando outros tipos de representação não permitem obter soluções. Por isso, na última tarefa, recorre a figuras geométricas e utiliza-as como suporte para reflectir sobre as estratégias a adoptar e para mostrar e justificar os seus raciocínios e processos de cálculo. Mostra-se, ainda, capaz de identificar as limitações associadas à utilização de determinadas figuras no processo de exploração e obtenção de resultados e de seleccionar as mais adequadas para obter soluções mais exactas.

Luís é capaz de utilizar, igualmente, outra representação – a tabela. O aluno usa tabelas para organizar os dados necessários à realização de cálculos, para facilitar a sua execução, sobretudo quando opta por métodos numéricos que envolvem cálculos recursivos para obter soluções e para apresentar os seus resultados. A escolha deste tipo de representação parece ser induzida pela sua experiência escolar, uma vez que o aluno constrói as tabelas à semelhança das que aparecem nos livros de texto de Análise Numérica e que utiliza na resolução de exercícios na sala de aula.

As respostas que Luís apresenta na exploração das tarefas propostas, são essencialmente descritivas, usando a linguagem natural. O aluno utiliza esta linguagem em todas as tarefas, para explicar os seus raciocínios e para descrever e justificar os processos de obtenção de soluções, mesmo que estes tenham como base uma outra forma de representação. Quando tenta generalizar os resultados ou formalizar as suas respostas, continua a usar a linguagem natural mas complementa-a com alguma notação simbólica. Embora seja capaz de seleccionar os símbolos matemáticos adequados e utilizá-los de forma correcta, algumas vezes, as expressões simbólicas que apresenta não traduzem aquilo que descreve informalmente. É também de realçar o facto de o aluno incluir os quantificadores matemáticos, na notação simbólica que usa.

Raciocínio em tarefas de investigação. A realização das tarefas de investigação contribui para promover o uso de diversos processos característicos da actividade matemática que podem ajudar a compreender as características do raciocínio desenvolvido por Luís.

A procura de regularidades está presente, algumas vezes, no trabalho desenvolvido pelo aluno e tem por base a observação de exemplos, a contagem de elementos ou a realização de cálculos aritméticos simples. Este processo permite, de forma geral, a identificação de padrões e facilita a continuação do trabalho, na formulação de conjecturas. No entanto, nas situações em que o aluno, com base nestes processos, não reconhece toda a informação que é necessária e que está disponível, a identificação de padrões torna-se difícil e as conjecturas formuladas apresentam algumas limitações.

A formulação de conjecturas é um processo que Luís utiliza com frequência, em todas as tarefas, mas nem sempre de forma explícita. Estas conjecturas são muitas vezes baseadas em analogias, na identificação de padrões ou na análise de figuras, estratégias que nem sempre permitem identificar todas as propriedades relevantes para a sua formulação. Deste modo, as conjecturas apresentam-se, algumas vezes, incompletas ou mesmo incorrectas. No entanto, o aluno também é capaz de formular as suas conjecturas com base em processos dedutivos, tendo em conta propriedades e conceitos matemáticos. Nestes casos, as conjecturas apresentam-se, de modo geral, correctas, excepto quando partem de premissas erradas. A generalização de conjecturas raramente surge, mesmo quando é solicitada, e quando é realizada nem sempre se apresenta correcta. O aluno parece não compreender a utilidade deste processo para alargar o âmbito de aplicação de uma conjectura e tem tendência para considerar a generalização como um simples processo de formalização, isto é, a apresentação da descrição da conjectura em notação simbólica.

No trabalho desenvolvido por Luís, a formulação de várias conjecturas simultâneas que resultam de várias explorações ou da assunção de pressupostos diferentes, no sentido de alargar a exploração, não é um processo habitual. No entanto, na última tarefa, o aluno mostra-se capaz de refinar as suas conjecturas, propondo formulações alternativas ou reformulações, sempre que tem disponível mais informação (dados), no sentido de melhorar os resultados. Este processo tem por base algumas propriedades matemáticas e a análise de figuras geométricas.

O teste de conjecturas nem sempre está presente no trabalho desenvolvido por Luís, que mostra tendência para aceitar as conjecturas sem as pôr à prova. Há, no entanto, algumas vezes em que o aluno recorre a conceitos ou usa a experimentação de casos, geralmente limitada a um único exemplo ou aos exemplos disponíveis no enunciado, para verificar a validade das conjecturas formuladas. Estas situações surgem quando tem dúvidas sobre a conjectura formulada e parecem estar relacionadas com o facto de utilizar conhecimentos recentes nessa formulação. Quando verifica que uma conjectura não é válida, tenta reformulá-la, se identificar os erros ou então desiste da exploração e deixa a tarefa incompleta.

O processo de justificação de conjecturas também tem uma presença reduzida no trabalho do aluno, apesar de Luís tentar explicar todos os seus raciocínios. Na fase inicial deste estudo, o aluno não sente necessidade de justificar as conjecturas que lhe parecem verdadeiras, independentemente do processo que utiliza para as formular. A justificação só está presente quando se baseia em propriedades matemáticas e/ou utiliza raciocínio dedutivo para formular as conjecturas, apesar do uso deste processo não ser intencional. À medida que o aluno adquire experiência na exploração de tarefas de investigação, esta atitude altera-se e o aluno compreende que deve justificar os seus raciocínios e as suas conjecturas antes de dar por concluído o seu trabalho. Na última tarefa, é visível a sua preocupação em justificar os raciocínios que suportam a solução, com base em conceitos e propriedades matemáticas ou em figuras geométricas. As aulas de discussão em grande grupo e os comentários aos relatórios escritos podem ter contribuído para modificar este seu comportamento. Os argumentos que utiliza são, de forma geral, adequados e, apesar do processo de justificação não incluir elementos de prova formal, uma vez que o aluno argumenta de uma forma descritiva e numa linguagem natural, evidencia uma evolução e passa a reconhecer a importância e o significado de justificar as suas conjecturas.

Raciocínio em problemas. Nos problemas, Luís mostra-se capaz de identificar os dados mas, quando estes não permitem uma clara identificação do tipo de problema por analogia com outros semelhantes já seus conhecidos, mostra alguma dificuldade na sua interpretação e, consequentemente, em iniciar a sua resolução. Durante esta fase, não é visível a utilização de estratégias variadas para facilitar a compreensão do problema e para permitir ao aluno planear a sua resolução, de forma eficiente.

Na fase de exploração e planificação de um problema, Luís começa por seleccionar uma única estratégia de resolução. Durante esta fase, o aluno recorre a diversas estratégias suas conhecidas, das quais se destacam, a simplificação do problema, a redução de dados, a estimação de valores, a substituição de incógnitas, a manipulação algébrica e a representação gráfica de funções. Estas estratégias são escolhidas, geralmente, de forma rotineira, com base na sua experiência na resolução de problemas semelhantes e, por isso, nem sempre são adequadas para o conduzir à solução pretendida. Também não é visível, nesta fase, o aluno a imaginar o desenvolvimento do processo de resolução para avaliar a viabilidade ou a eficiência da estratégia proposta antes de a executar.

Na fase seguinte, o aluno empenha-se, predominantemente, na execução do plano inicial proposto. Este trabalho contempla a realização de cálculos, que regista com algum detalhe e a utilização de várias estratégias que permitem obter uma solução para o problema. Entre estas estratégias destacam-se o cálculo de médias, o uso da regra de três simples, várias destrezas algébricas e ainda a utilização da máquina de calcular, quando apropriado, para representar graficamente funções e para encontrar a solução. Luís evidencia ter os conhecimentos matemáticos necessários para implementar, de forma correcta, as estratégias planeadas, embora não recorra com frequência aos mais recentes.

Nesta fase de execução, quando o aluno tenta encontrar uma solução através de uma estratégia planeada, e não obtém resultados, volta atrás à fase de planificação, selecciona nova estratégia e recomeça nova fase de execução. Assim, a avaliação das estratégias planeadas só ocorre depois do aluno entrar nesta fase do processo de resolução do problema. No entanto, este ciclo nem sempre é repetido até que seja identificado um caminho para a solução. Por vezes, o aluno desiste e deixa a resolução do problema incompleta porque não identifica uma nova estratégia que permita obter uma resposta. Nas situações em que encontra uma solução, o aluno ainda procura outras estratégias alternativas e reflecte sobre a sua eficiência. No entanto, opta por manter e apresentar a estratégia inicial, se a considerar a mais eficiente, ou apresenta mais do que uma, se não for capaz de as avaliar em termos de eficiência.

No trabalho de Luís, a resolução de problemas não contempla uma fase de verificação de cálculos nem de resultados. Deste modo, não deixa vestígios do uso de estratégias de verificação. Depois de obter uma solução, o aluno também não mostra preocupação em dar uma resposta ao problema nem tem o cuidado de interpretar e explicar os resultados obtidos, dentro do seu contexto.

Aprendizagem em Análise Numérica. No caso de Luís, os resultados do estudo evidenciam as potencialidades das tarefas de investigação para a aprendizagem da Análise Numérica. A sua exploração permite abordar diversos tópicos programáticos desta disciplina, estabelecer ligações entre eles e facilita a aprendizagem significativa de conceitos e procedimentos.

O aluno parece ter compreendido diversos conceitos e procedimentos base da disciplina, uma vez que os utiliza, de forma correcta, na exploração de várias tarefas. Destacam-se os conceitos de erro, de valor aproximado e de intervalo ou os métodos de interpolação polinomial e ajuste de curvas. É ainda capaz de relacionar estes conceitos e utilizá-los como base para deduzir ou verificar regras e para seleccionar estratégias de exploração das tarefas. Por diversas vezes, mobiliza conhecimentos recentemente adquiridos para os aplicar, adequadamente, em novas situações, revelando ser capaz de compreender a sua utilidade e aplicabilidade.

Os resultados do estudo mostram, ainda, que durante a exploração das tarefas, o aluno constrói e utiliza, de forma intuitiva, determinados conceitos e procedimentos contemplados no programa da disciplina mas ainda não trabalhados nas aulas (por exemplo, as regras da aritmética intervalar ou o método dos mínimos quadrados). Deste modo, o aluno mostra compreender a sua origem e os seus fundamentos em vez de memorizar definições e fórmulas, que são facilmente esquecidas e, quando precisar de utilizar estes conhecimentos, pode aceder-lhes através da reprodução deste processo de construção. A aprendizagem com significado fica, assim, facilitada e Luís passa a desempenhar um papel importante nesse processo.

Para o aluno, o processo de aprendizagem não está limitado à aquisição de conhecimentos ligados aos tópicos programáticos da disciplina. Luís salienta, que a realização das tarefas propostas permite desenvolver competências ao nível do raciocínio e a compreensão dos processos de matemáticos que utiliza na sua exploração.

Capítulo 9

Discussão de resultados

Neste capítulo apresento e discuto os principais resultados do estudo, articulando-os com a revisão da literatura realizada. Assim, começo por analisar os processos de raciocínio utilizados e as dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução de problemas e na realização de tarefas de exploração/investigação e a sua possível relação com as aprendizagens realizadas durante a experiência de ensino. Concluo com uma análise das reacções dos alunos à experiência de ensino e uma reflexão minha sobre a forma como esta decorreu.

9.1. Raciocínio dos alunos na realização de actividades de investigação e na resolução de problemas

Representações matemáticas e dificuldades manifestadas. A análise do trabalho desenvolvido na realização das tarefas propostas ao longo da experiência de ensino pelos três alunos objecto de estudos de caso permite salientar alguns aspectos relativos ao modo como seleccionam e utilizam as diversas representações matemáticas e as funções que estas desempenham na exploração dessas tarefas.

Luís e Carlos mostram preferência pela representação algébrica na exploração das tarefas de investigação. Mesmo quando conhecem e têm à sua disposição outras representações que permitem abordagens mais eficientes, estes alunos optam por usar manipulação algébrica para deduzir regras ou para encontrar soluções. No entanto, a representação algébrica nem sempre é adequada porque às vezes não permite detectar conflitos e erros na solução obtida nem identificar padrões no comportamento de valores numéricos que facilitem a selecção de um método de resolução. Deste modo, e como estes alunos não usam, habitualmente, outro tipo de representação que permita corrigir os resultados, as suas respostas, obtidas com base na representação algébrica, nem sempre estão correctas. Só quando este modo de representação não permite encontrar soluções ou quando são solicitados a apresentar estratégias alternativas é que recorrem a outras formas de representação como gráficos, tabelas ou figuras geométricas.

Esta tendência para privilegiar a representação algébrica na resolução de problemas é referida em outros estudos (por exemplo, Cai, 2000; Ozgun-Koca, 1998; Tom & Russell, 2001) em que os alunos justificam a sua preferência por este tipo de representação por a acharem mais fácil de compreender e por consumir menos tempo. Estas são, também, as razões que Carlos aponta para a sua tendência inicial de optar pela representação algébrica, embora depois o seu trabalho e o de Luís não o confirmem. De facto, há situações em que a representação gráfica, por exemplo, é mais eficiente (por ser mais rápida) na obtenção de uma solução para o problema mas os alunos optam por uma abordagem algébrica. Além disso, quando utilizam outras representações, como tabelas ou gráficos, revelam facilidade no seu uso e interpretam correctamente os seus resultados. Outras vezes, quando Carlos é confrontado com resultados distintos, obtidos através de diferentes representações, não é capaz de identificar a origem dos conflitos e dos erros nessas soluções (por não compreender o significado do resultado algébrico). Opta pela solução algébrica porque é aquela em que confia mais e não aquela que melhor compreende, à semelhança dos resultados obtidos por Knuth (2000). Assim, a alegada facilidade de compreensão referida pelo aluno parece estar relacionada com o conforto da aplicação rotineira de procedimentos algébricos com os quais está mais familiarizado e que, por isso, considera um processo mais fácil.

Contrariamente ao descrito para Luís e Carlos, a representação algébrica tem uma presença muito reduzida no trabalho de Gonçalo. O aluno usa a manipulação algébrica apenas enquanto procedimento de preparação para o uso de outras estratégias ou em situações em que é induzido pela prática escolar, caso em que a abandona assim que identifica a sua inviabilidade na obtenção de resultados. Este comportamento pode estar relacionado com as dificuldades com que o aluno se depara habitualmente na realização de procedimentos rotineiros e cálculos. Como ele próprio refere, o foco do seu trabalho/estudo é a compreensão e não a prática de exercícios e procedimentos. Deste modo, o aluno parece considerar os procedimentos algébricos mais difíceis por estar consciente que não se familiariza o suficiente com eles para uma utilização bem sucedida e, sempre que possível, opta por outras representações que lhe facilitam, igualmente, a compreensão dos problemas e a interpretação dos resultados obtidos.

Deste modo, os resultados do estudo revelam que apenas um caso, Gonçalo, tem tendência para, naturalmente, utilizar a representação gráfica mesmo quando outros tipos de representações são possíveis. O aluno recorre a este tipo de representação, com frequência, para analisar a informação disponibilizada no enunciado, como forma de desenvolver compreensão dos problemas e também para obter soluções sem ter que recorrer à manipulação algébrica, pois é aí que continua a revelar dificuldades. Nestes casos, recorre à máquina de calcular como ferramenta auxiliar na representação gráfica da informação, na construção de gráficos de funções e na obtenção de soluções de forma eficiente.

No trabalho desenvolvido por Carlos e Luís, a representação gráfica só surge quando explicitamente solicitada ou quando os alunos não têm disponíveis, entre os seus recursos, outras representações que permitam obter soluções. Esta resistência ao uso deste tipo de representação, também generalizada ao nível da turma, nas primeiras tarefas, vai ao encontro do que referem os estudos de Eisenberg (1991) e Frota (2004) sobre a utilização da representação gráfica. Frota (2004) indica que os alunos eliminam a estratégia gráfica logo à partida, pelas alegadas dificuldades em esboçar gráficos. No entanto, mesmo quando estão na posse de uma calculadora gráfica e revelam desenvoltura na sua manipulação, esses alunos mostram-se reticentes em usar estratégias gráficas. No presente estudo, os alunos também têm à sua disposição a máquina de calcular gráfica e utilizam-na, com frequência, quando optam por estratégias gráficas para resolver as tarefas propostas. Carlos e Luís mostram competência no uso da máquina de calcular, as estratégias gráficas utilizadas são, de modo geral, adequadas às questões e são capazes de interpretar correctamente os gráficos e os resultados obtidos, que se apresentam quase sempre correctos. Assim, a presença reduzida da representação gráfica no trabalho inicial destes alunos parece não residir nas dificuldades "cognitivas" (Arcavi, 2003) mas pode estar relacionada com a falta de prática em níveis educativos anteriores e com a crença que o uso de representações gráficas constitui um raciocínio pouco formal, matematicamente inaceitável no ensino superior (as chamadas dificuldades "culturais" indicadas por Arcavi, 2003), como sugerido em Eisenberg e Dreyfus (1991).

No decorrer da experiência de ensino, a generalidade dos alunos modifica este comportamento inicial que Carlos e Luís manifestam e verifica-se um aumento gradual do recurso à representação gráfica para analisar e desenvolver compreensão sobre a informação disponibilizada no enunciado, como suporte e ilustração de raciocínios e para confirmar resultados obtidos através de outras formas de representação. No final da experiência, é visível a capacidade dos alunos planearem e seleccionarem as suas estratégias com base na análise de gráficos e, deste modo, a representação gráfica passa a ter um papel importante na justificação dos seus raciocínios e das soluções encontradas, contrariando assim a tendência observada em Stylianou e Silver (2004) em que os alunos universitários, apesar de conceberem as representações gráficas como estratégias viáveis, não as aplicam frequentemente para compreender o problema e planear a solução durante o processo de resolução de problemas. Gonçalo e Carlos superam estas dificuldades logo nas primeiras tarefas, quando compreendem que a representação gráfica não está só relacionada com propósitos ilustrativos, mas é também uma componente chave do raciocínio e da resolução de problemas, como defende Arcavi (2003). Luís, revela, neste ponto, dificuldades acrescidas pois acaba por não usar a representação gráfica para analisar e desenvolver compreensão sobre valores numéricos, planear as suas estratégias ou para testar resultados. É de salientar, ainda, que à semelhança do descrito em Arcavi (2003) e Frota (2004), quando os alunos começam a utilizar a representação gráfica para confirmar os resultados obtidos numericamente são capazes de detectar os problemas nas soluções algébricas apresentadas e de resolver os conflitos entre essas soluções e as suas intuições.

Carlos, Gonçalo e Luís revelam facilidade em trabalhar com outra forma de representação, a tabela. Estes alunos, à semelhança do que se passa na generalidade da turma, utilizam tabelas com alguma frequência para organizar os dados e para apresentar resultados. Estas tabelas, segundo Flores e Moretti (2005), constituem-se apenas como um banco de dados, servindo basicamente o propósito de comunicação e têm um custo cognitivo bastante baixo. No entanto, os alunos utilizam a representação em tabela também com outras finalidades que, segundo os mesmos autores, exige uma certa desenvoltura visual, um empenho cognitivo mais elevado e o domínio do próprio funcionamento representacional. Os alunos parecem ter a percepção que uma adequada disposição de dados pode auxiliar, por um lado, os cálculos seguintes, sobretudo quando optam por métodos numéricos que envolvem cálculos recursivos para obter soluções e, por outro, uma rápida análise de resultados. Por isso, recorrem a tabelas também com o objectivo de facilitar a identificação da informação necessária à realização de cálculos e a própria execução desses cálculos que conduzem à obtenção de soluções. Embora mostrem facilidade na sua utilização, em algumas situações constroem as suas tabelas à semelhança das que surgem nos manuais da disciplina e que utilizam na resolução de exercícios na sala de aula, pelo que a escolha deste tipo de representação, nestes casos, pode ser induzida pela experiência escolar anterior. Outras vezes, ainda, as tabelas que os alunos constroem permitem fazer emergir novos dados, realizar inferências sobre a existência de relações desconhecidas ou mostrar a necessidade de distinções que até então não tinham sido tidas em conta. Dos três alunos, Carlos destaca-se por utilizar tabelas, ao longo do seu trabalho, também para encontrar soluções que confirmem as que obtém através de outras formas de representação (gráficas ou algébricas).

As figuras geométricas são outra forma de representação utilizada na exploração das tarefas propostas pelos três casos analisados e pela generalidade dos alunos da turma. Duval (2004) considera que na representação geométrica, as figuras são o meio mais directo para explorar os diferentes aspectos de um problema, antecipar os seus resultados e seleccionar uma forma de os resolver, constituindo-se, deste modo, como instrumento auxiliar na compreensão e resolução de problemas. Carlos, Gonçalo e Luís optam por usar figuras geométricas na exploração da última tarefa quando outro tipo de representação não lhes permite obter soluções. Nesta altura, recorrem a figuras geométricas para processar (observando a imagem) as informações disponíveis no enunciado da tarefa, para explorar propriedades e para sistematizar os processos de cálculo, tal como observado em Viana (2007). Para além disso, estes alunos parecem ter compreendido o importante papel das representações visuais na procura de soluções para problemas matemáticos e na justificação de estratégias e resultados. De facto, as figuras utilizadas pelos alunos desempenham outros papéis, servindo também para auxiliar nas decisões estratégicas (ajudam a organizar o raciocínio para encaminhar a resolução do problema) e para mostrar e justificar os seus raciocínios. Por vezes, os alunos ainda são capazes de reconfigurar (ou refinar) determinadas figuras quando identificam algum tipo de limitações associadas à sua utilização. Este processo, também identificado por Flores e Moretti (2006) e Viana (2007), permite a obtenção de soluções mais exactas.

Os três alunos estudados individualmente têm uma grande preocupação em descrever, através de linguagem natural, todos os seus raciocínios e processos de obtenção de soluções, mesmo quando utilizam as outras representações já referidas. Esta atitude, descrita igualmente em Boero et al. (2008), parece mostrar a necessidade que os alunos têm de expressar proposições algébricas em palavras quando procuram reconhecer uma possível conjectura ou procurar uma compreensão semanticamente consistente com os sinais algébricos. A linguagem natural é explorada, aqui, como uma ferramenta crucial para reflectir sobre a situação, para descrever procedimentos e gerir os processos de formalização e interpretação. Estes autores referem, ainda, que os alunos ao tentarem justificar os seus raciocínios e soluções podem considerar os argumentos sintácticos insuficientes e enfrentam dificuldades que os conduzem a apresentar a sua argumentação em palavras. Nesta situação, os argumentos com raízes semântica (expressas em palavras) tornam-se fundamentais. No entanto, Weber (2004) conclui que os alunos raramente tentam construir provas semânticas porque estão muito expostos à 'linguagem de prova estrita' que os torna resistentes ao uso de outras formas de representação, olhando para elas como ferramentas matemáticas não legítimas (o que é observado também por Lavy, 2006). Por isso, neste estudo, quando os três alunos são solicitados a generalizar resultados ou a formalizar as suas respostas, parecem considerar a linguagem natural inadequada e, quando lhes é possível, complementam-na com alguma notação simbólica. Para estes alunos, a diferença entre linguagem natural e simbólica reside sobretudo nas suas funções diferenciadas. Têm a concepção que a linguagem natural é usada para promover a comunicação pessoal mas têm que utilizar a notação simbólica para fornecer uma imagem efectiva e bem organizada do conhecimento matemático e dar suporte à aplicação de procedimentos. No entanto, a utilização de notação simbólica parece ser uma das dificuldades que emergem da actividade matemática deste alunos, uma vez que as expressões simbólicas que apresentam estão, algumas vezes, incompletas e nem sempre traduzem, de forma adequada, o que é correctamente descrito informalmente. Apesar das dificuldades referidas, Luís destaca-se em relação a este aspecto pelo rigor que coloca na sua escrita simbólica e pela capacidade de seleccionar adequadamente os símbolos matemáticos. Talvez por isso, é o único aluno a incluir quantificadores nas suas expressões.

Ao longo da experiência de ensino, sobretudo na escrita dos relatórios e nas discussões em grupo, os alunos são incentivados e sentem a necessidade de desenvolver as suas capacidades linguísticas que são essenciais para compreender e comunicar Matemática. Assim, de uma situação em que utilizam a linguagem natural sem grande propriedade e que, por isso, nem sempre expressa o que querem dizer, os alunos evoluem para uma utilização cuidada e rigorosa das palavras e aprendem a desenvolver argumentos semânticos convincentes. Já em relação à linguagem simbólica, a evolução dos alunos não é significativa. Embora, no final do semestre, entendam a importância de uma correcta utilização da notação simbólica e desenvolvam esforços nesse sentido quando deduzem e/ou generalizam resultados, as suas dificuldades mantém-se, sobretudo ao nível da prova. De facto, durante a experiência de ensino e como Hanna (1989) defende, a notação simbólica é vista como uma ferramenta a ser usada em todo o seu rigor quando necessário (e o trabalho a desenvolver no contexto das tarefas propostas pretende ir nesse sentido) mas é interpretado com alguma tolerância noutras situações (por exemplo, no caso da prova formal que não é o foco da aprendizagem destes alunos e que, algumas vezes, nem está ao seu alcance).

Apesar das suas preferências e dificuldades, acima descritas, os três alunos revelam capacidade e destreza para trabalhar com várias formas de representação e para estabelecer relações entre elas. Nas discussões em grupo, sobretudo as realizadas com toda a turma, os alunos confrontam-se com estratégias de resolução diferentes das suas e/ou que utilizam formas de representação também diversas. Neste confronto, aprendem a fazer escolhas mais razoáveis acerca das representações, pois compreendem as situações em que cada uma delas é mais vantajosa e evoluem para a utilização intencional de diferentes formas de representação onde a tradução entre elas constitui prática corrente. Deste modo, relativamente ao trabalho com diferentes representações, todos os alunos parecem ter beneficiado com as tarefas realizadas. O trabalho simultâneo das diferentes representações durante a discussão das tarefas, parece ter contribuído para a compreensão de cada uma delas, bem como para a conversão entre elas, permitindo deste modo uma melhor compreensão dos problemas, como é apontado por Duval (2006).

Processos matemáticos na realização das tarefas de investigação e dificuldades manifestadas. A realização das tarefas propostas aos alunos, ao longo da experiência de ensino, possibilita a utilização de vários processos característicos da actividade matemática. A análise do trabalho desenvolvido pelos três alunos estudos de caso permite concluir sobre o modo como o fazem e as dificuldades que enfrentam.

Assim, Carlos, Gonçalo e Luís têm sempre a preocupação de fazer registos escritos das suas explorações de modo a facilitar a posterior escrita dos relatórios. Embora, nas primeiras tarefas, esses registos não sejam significativos das suas descobertas, os processos de registo e organização dos dados estão presentes em todas as tarefas e a sua evolução faz-se de forma gradual.

A formulação de questões é, para alguns autores (Cai, 2003; Ernest, 1996; Ponte et al., 1998), uma componente importante de qualquer investigação matemática. Apesar disso, o trabalho desenvolvido pelos três alunos não contempla formalmente esta etapa, dado que logo no início da realização das tarefas emergem as primeiras conjecturas já sob a forma de afirmações. Esta atitude pode estar relacionada não só com a sua inexperiência na exploração de tarefas de investigação mas também com a sua concepção que o seu papel de aluno é a (rápida) obtenção de respostas/conclusões para as tarefas matemáticas propostas pelo professor (Frank, 1988; Schoenfeld, 1992). No entanto, esta dificuldade demonstrada pelos alunos na formulação de questões, também referida noutras investigações (Brocardo, 2001; Ponte e Matos, 1996; Silver, 1993), mantém-se ao longo da experiência de ensino, mesmo quando, depois de adquirida uma certa experiência na exploração de tarefas de investigação, os alunos já manifestam alguma compreensão dos processos matemáticos associados à exploração de tarefas deste tipo.

A procura de regularidades está presente no trabalho desenvolvido pelos três alunos analisados individualmente e permite-lhes identificar padrões. Luís utiliza este processo com pouca frequência e baseia-se, sobretudo, na observação de exemplos (geralmente os que lhe são apresentados), em contagens e em cálculos simples. Carlos procura regularidades com mais frequência, também com base na observação dos dados e na sua manipulação mas procura explorar outros casos particulares, pouco sistematizados. É Gonçalo quem se destaca neste ponto pela variedade e intencionalidade das suas estratégias. Este aluno recorre não só à observação directa de exemplos (os que lhe são apresentados e outros que explora com alguma sistematização) mas também a gráficos e esquemas visuais e numéricos que ele próprio constrói com o objectivo de compreender e facilitar a identificação de padrões. As dificuldades observadas neste processo surgem quando os alunos não têm em conta toda a informação que é necessária e que está disponível, altura em que a correcta identificação de padrões se torna difícil e o trabalho seguinte de formulação de conjecturas fica limitado.

Durante a experiência de ensino, os três alunos revelam facilidade na formulação de conjecturas, embora nem sempre o façam de forma explícita. As conjecturas formuladas por Carlos e Luís emergem de forma imediata, quase sempre baseadas em analogias, na identificação de padrões ou na experimentação de casos únicos ou sem sistematização aparente. Esta ausência de sistematização e o carácter pouco organizado da especialização realizada pelos alunos nem sempre permitem a determinação de propriedades matemáticas relevantes para o processo de generalização seguinte, ficando este dificultado, tal como referem Mason, Burton e Stacey (1982). Deste modo, as conjecturas apresentam-se, algumas vezes, incompletas ou mesmo incorrectas. Luís revela dificuldades adicionais, pois a generalização de conjecturas raramente surge no seu trabalho, ao contrário dos outros casos que a realizam sempre que são solicitados. O aluno parece não compreender a utilidade deste processo para alargar o âmbito de aplicação de uma conjectura e tem tendência para considerar a generalização como um simples processo de formalização, isto é, apresenta a descrição da conjectura em notação simbólica. Gonçalo destaca-se, mais uma vez, pois as estratégias que usa na procura de regularidades e na identificação de padrões, já descritas, parecem ser escolhidas pelo aluno de forma a permitir a determinação de propriedades matemáticas que são fundamentais para uma generalização correcta das suas conjecturas. É de salientar, ainda, que o processo de generalização levado a cabo resulta, frequentemente, na construção de métodos numéricos até então desconhecidos pelo aluno. Nos casos em que Carlos, Gonçalo e Luís formulam as suas conjecturas com base em processos dedutivos, tendo em conta conceitos e propriedades matemáticas, estas apresentam-se, de modo geral, correctas, excepto quando os alunos partem de premissas erradas.

No trabalho desenvolvido por Carlos e Luís, a formulação de várias conjecturas simultâneas que resultam de várias explorações ou da assumpção de pressupostos diferentes, no sentido de alargar a exploração, não é um processo habitual. No entanto, Carlos, por diversas vezes, propõe formulações alternativas ou reformulações no sentido de melhorar os resultados, permitindo-lhe refinar as conjecturas formuladas, como Ponte et al. (1998) sugerem. Apesar de revelar maiores dificuldades, no final da experiência de ensino Luís também se mostra capaz de refinar as suas conjecturas quando verifica que não são válidas. Por seu lado, Gonçalo formula várias conjecturas simultâneas que resultam de diferentes explorações ou que são baseadas em pressupostos diferentes no sentido de alargar a exploração da tarefa. Outras vezes, quando há diversos factos a considerar na formulação de uma conjectura, opta por formular conjecturas parciais sobre cada um deles e, quando dá por terminado este processo, formula uma conjectura mais geral tendo em conta as anteriores. No final da experiência o aluno também é capaz de formular diferentes conjecturas, de forma sucessiva, no sentido de as refinar e obter melhores aproximações da solução inicial.

O teste e a justificação de conjecturas são também aspectos onde se observam algumas dificuldades. A concepção usual nos alunos, de que a resolução de uma tarefa matemática implica a obtenção de uma resposta, leva Carlos e Luís, numa fase inicial, a formularam conjecturas de forma implícita e a aceitá-las como conclusões, não sentindo necessidade de as justificar. Esta tendência, observada também por Ponte et al. (1998), parece estar mais relacionada com a inexperiência dos alunos na realização deste tipo de tarefas e a dificuldade em perceber características importantes do processo de investigação do que com as dificuldades relacionadas com a realização de testes.

Com o decorrer da experiência de ensino e com a exploração das tarefas propostas, estes alunos percebem a importância da realização de testes de confirmação das conjecturas formuladas e este processo passa a ser uma preocupação constante. No entanto, Luís nem sempre consegue fazê-lo de forma adequada. O aluno realiza o teste de conjecturas nas situações em que tem dúvidas sobre a conjectura formulada e isso parece estar relacionado com o facto de utilizar conhecimentos recentes nessa formulação. Na maioria das vezes o teste é realizado através da experimentação de um único exemplo ou dos exemplos disponíveis no enunciado e, deste modo, nem sempre se apercebe de incorrecções ou limitações nas conjecturas formuladas. Quando, através do teste, verifica que uma conjectura não é válida, tenta reformulá-la se identificar os erros ou então desiste da exploração e deixa a tarefa incompleta. Pelo seu lado, Carlos utiliza estratégias diversas. Algumas vezes, também realiza o teste através da experimentação de um exemplo único ou de exemplos disponíveis no enunciado. Há, no entanto, noutras vezes a verificação baseia-se em representações gráficas e/ou em conceitos e propriedades matemáticas. Nestes casos, o teste das conjecturas acaba por coincidir com o processo da sua justificação. Finalmente, o trabalho desenvolvido por Gonçalo contempla, de forma espontânea, o teste de conjecturas. Logo na primeira tarefa, depois de formular implicitamente conjecturas, realiza logo de seguida de um teste com base nos dados recolhidos. Quando este processo tem por base as representações gráficas ou a experimentação de casos, geralmente os exemplos disponíveis no enunciado ou outros sem sistematização evidente, o aluno nem sempre se apercebe de incorrecções ou limitações nas suas conjecturas. A identificação desses erros e a posterior correcção das conjecturas só acontece quando usa toda a informação disponível e é capaz de a relacionar, na realização do teste. Outras vezes, quando as conjecturas são formuladas usando raciocinio lógico, já não sente necessidade de realizar qualquer tipo de teste, revelando compreender o papel do teste de conjecturas no trabalho de exploração.

À semelhança do descrito noutros estudos (Brocardo, 2001; Fonseca, 2000), o processo de justificação de conjecturas não está contemplado ao longo do trabalho dos alunos. A dificuldade que os alunos têm em perceber a importância e o significado de estabelecer uma prova para as conjecturas que resistem a sucessivos testes, aliada à falta de hábito em procurar justificações ou mesmo a uma certa falta de conhecimentos, pode justificar a ausência deste processo nas suas explorações iniciais. Para Carlos e Luís, a justificação de conjecturas é um processo que acaba por ter uma presença reduzida nos seus trabalhos, apesar de tentarem explicar sempre os seus raciocínios. Inicialmente, a justificação só está presente quando se baseiam em propriedades matemáticas e/ou utilizam raciocínio dedutivo para formular as suas conjecturas, apesar do uso deste processo não ser explícito nem intencional. À medida que os alunos adquirem experiência na exploração de tarefas de investigação, esta atitude altera-se e, na última tarefa, já é visível a sua preocupação em justificar os raciocínios que suportam a solução. Gonçalo mostra ter percebido esta ideia um pouco mais cedo e, algumas vezes, além de explicar os seus raciocínios também os justifica com base em propriedades matemáticas. Deste modo, a justificação de conjecturas surge naturalmente e com frequência, ao longo do seu trabalho. Os três alunos mostram, também, facilidade em compreender intuitivamente os argumentos matemáticos que suportam as suas soluções e que se apresentam, de forma geral, adequados, apesar do processo de justificação não incluir elementos de prova formal. De facto, esses argumentos são maioritariamente visuais e/ou apresentados de uma forma descritiva e numa linguagem natural. Isto pode ter a ver com dificuldades com o formalismo, já identificadas e só um trabalho continuado com ênfase nesse aspecto poderá alterar.

O comportamento descrito para estes três casos individuais é observado, igualmente, nos restantes alunos da turma. Com base nas conclusões retiradas ao nível dos processos matemáticos utilizados pelos alunos na exploração de investigações matemáticas, pode afirmar-se que os alunos envolvidos neste estudo utilizam de modo semelhante os processos de procura de regularidades, formulação e teste de conjecturas, especialização e generalização. Destes processos, a formulação e teste de conjecturas são aqueles que surgem mais automática e frequentemente durante a sua actividade. Já o uso dos processos de justificação tem uma presença muito reduzida no trabalho dos alunos, surgindo poucas vezes de forma espontânea. Numa fase inicial do trabalho desenvolvido com a turma, os alunos não sentem necessidade de justificar as conjecturas que lhes parecem verdadeiras após a realização de testes. À medida que vão adquirindo experiência na exploração de tarefas de investigação, alteram este comportamento e passam a reconhecer a importância e significado do processo de justificação de conjecturas. A minha insistência como professora em salientar este processo nos momentos de discussão final da actividade desenvolvida pelos vários grupos e nos comentários aos relatórios escritos pode ter contribuído para essa evolução. Apesar disso, a demonstração de algumas conjecturas não é acessível aos alunos, dificultando, deste modo, a interiorização desta fase da investigação. Assim, nas últimas tarefas, a grande maioria dos alunos tem a clara noção de que deve pensar na justificação das suas conjecturas antes de dar por concluído o seu trabalho mas só o tentam fazer quando tal é explicitamente pedido pela professora. É evidente, também, que ao longo da experiência de ensino, todos os alunos tomam, gradualmente, conhecimento dos vários processos matemáticos de que se podem servir para progredir na exploração das tarefas propostas.

Estratégias de resolução de problemas e dificuldades manifestadas. A análise do trabalho desenvolvido pelos três alunos estudos de caso ao longo da experiência de ensino permite evidenciar alguns aspectos relativos ao modo como desenvolvem a sua actividade de resolução de problemas, com destaque para as estratégias que utilizam e para as dificuldades que enfrentam neste processo. Como sugere Pólya (1975), a resolução de problemas envolve várias fases: (i) a compreensão do problema; (ii) o desenvolvimento de um plano; (iii) a execução do plano; e (iv) a verificação e discussão dos resultados. Durante a experiência de ensino, os três alunos revelam ser capazes de interpretar e compreender problemas e de definir e aplicar estratégias adequadas para a sua resolução. No entanto, o seu desempenho ao longo das diferentes fases do processo de resolução não é idêntico.

Carlos e Gonçalo não apresentam dificuldades em interpretar e compreender os problemas das tarefas propostas. Nesta fase de compreensão, os alunos empenham-se em dar sentido à informação disponível no enunciado do problema, exprimindo-a noutros termos, usando a linguagem natural. À medida que o fazem, recorrem espontaneamente aos seus conhecimentos (conceitos, propriedades e procedimentos) e estabelecem relação com o respectivo contexto para identificar o tipo de problema. Depois, de acordo com essa classificação, planeiam a sua resolução. Pelo seu lado, Luís apresenta dificuldades nesta fase. Mostra-se capaz de identificar os dados mas, quando estes não permitem uma clara identificação do tipo de problema por analogia com outros semelhantes que já conhece, mostra alguma dificuldade na sua interpretação e, consequentemente, em iniciar a sua resolução. Segundo Lithner (2008), este comportamento pode estar relacionado com o facto do argumento que convence o aluno sobre a escolha da estratégia ser baseado, através da prática de tarefas semelhantes, na experiência estabelecida que uma tarefa com certas características (textuais, gráficas ou simbólicas) está relacionada com determinado algoritmo de resolução. Contudo, a validade deste raciocínio algorítmico familiar (segundo a classificação do autor) não é fundamentado em propriedades matemáticas e, por isso, não é fiável em situações problemáticas. Durante esta primeira fase do processo de resolução, nenhum dos três alunos mostra utilizar estratégias variadas para facilitar a compreensão do problema e para permitir um eficiente planeamento da sua resolução.

Na fase seguinte de exploração e planificação do problema, os três alunos recorrem a diversas estratégias que conhecem e revelam facilidade em utilizá-las para resolver problemas. Entre elas, destacam-se: a organização e redução de dados para os tornar manipuláveis, a simplificação do problema, a sua reformulação ou decomposição em subproblemas, a planificação hierárquica da solução, a manipulação algébrica e a representação gráfica de funções. Carlos e Gonçalo mostram ter conhecimentos suficientes (sobre conceitos e procedimentos matemáticos) e algum potencial heurístico para seleccionar, de forma adequada a cada problema, as estratégias que podem conduzir à solução pretendida. Luís, tal como na fase anterior de compreensão, tenta seguir um raciocínio por analogia com outros problemas para a escolha das suas estratégias, como é sugerido por English (1999), mas nem sempre o faz de forma adequada.

Ainda nesta fase de planificação, Carlos e Luís começam por propor uma estratégia de resolução única e, na maioria das vezes, antes de a executar, não imaginam o desenvolvimento do processo de resolução para avaliar a viabilidade da estratégia proposta ou a sua eficiência. Pelo contrário, Gonçalo é observado a avaliar a viabilidade ou a eficiência da estratégia proposta inicialmente ainda durante esta fase, como descrito por Carlson e Bloom (2005). Assim, quando o aluno, através da observação dos dados e com base nos seus conhecimentos matemáticos, identifica algum obstáculo à execução da estratégia proposta no plano inicial, opta por modificar o problema (por exemplo, reduzindo os dados) de forma a adaptá-lo à sua estratégia. Quando reflecte sobre a estratégia planeada e verifica que esta não é a mais eficiente, opta por reformulá-la, simplificando-a, ou por planificar novas estratégias.

Na fase seguinte de execução, o trabalho desenvolvido pelos três alunos analisados individualmente é orientado para cumprir o plano proposto. Este trabalho consiste, essencialmente, na realização de cálculos, que registam com algum detalhe, e na implementação das várias estratégias definidas para obter uma solução para o problema. As estratégias identificadas nesta fase são variadas e incluem a realização de cálculos numéricos, a estimação de médias, o uso da regra de três simples, a manipulação algébrica, a utilização da representação gráfica e das potencialidades da máquina de calcular para representar graficamente funções e para encontrar a solução e, ainda, a execução de algoritmos de métodos numéricos conhecidos, alguns dos quais construídos pelos alunos. De um modo geral, revelam ter os conhecimentos matemáticos necessários a um bom desempenho na aplicação dessas estratégias, sejam elas de resolução numérica, gráfica ou algébrica. Apesar disso, Gonçalo tem tendência para utilizar os procedimentos que conhece mais recentemente, alguns dos quais deduzidos por si durante a exploração das questões anteriores da própria tarefa (são disso exemplo, os métodos de interpolação polinomial ou o método da bissecção para resolução de equações não lineares). No entanto, estes procedimentos são muitas vezes aplicados de forma rotineira e, por isso, nem sempre são os mais adequados em termos de eficácia e eficiência.

Quando, nesta fase de execução, os alunos não encontram (entre os seus recursos) as ferramentas necessárias para implementar a estratégia planeada ou quando verificam que esta não permite obter resultados (encontrar a solução), voltam atrás à fase de planificação, seleccionam nova estratégia e recomeçam nova fase de execução. Assim, no trabalho desenvolvido por Carlos e Luís, a avaliação das estratégias planeadas só ocorre no final desta fase do processo de resolução do problema. Gonçalo já faz uso desta avaliação na fase anterior. No entanto, em qualquer dos casos, esta avaliação nem sempre contempla a eficiência das estratégias que fica, assim, comprometida. Ainda no caso de Luís, este ciclo nem sempre é repetido até que seja identificado um caminho para a solução. Por vezes, e à semelhança do indicado em Lithner (2008), o aluno desiste e deixa a resolução do problema incompleta, sem reflexão, porque não identifica uma nova estratégia que permita obter uma resposta (de acordo com o que espera).

Um dos aspectos do raciocínio matemático sublinhado por Artzt e Yaloz-Femia (1999) é a preocupação que os alunos devem ter em verificar as soluções obtidas na resolução dos problemas, reflectir sobre elas ou apresentar uma justificação. No entanto, no trabalho dos três alunos, a resolução de problemas não contempla uma fase de verificação da correcção de cálculos e de resultados. De facto, nenhum dos alunos deixa vestígios do uso de estratégias de verificação, possivelmente porque têm confiança nos seus cálculos e processos de resolução que conduzem, de forma geral, a soluções que se ajustam ao esperado. Quando dão por terminada a resolução do problema, depois de obterem uma solução, Gonçalo e Luís também não mostram preocupação em dar uma resposta ao problema nem têm o cuidado de interpretar e explicar os resultados obtidos, dentro do seu contexto, contrariamente a Carlos que tem sempre esse cuidado.

Relativamente à procura de estratégias alternativas, é Luís quem se destaca. Nas situações em que encontra uma solução, o aluno ainda analisa se pode chegar ao mesmo resultado de outra maneira e reflecte sobre a sua eficiência. No entanto, opta por manter e apresentar a estratégia inicial, se a considerar a mais eficiente, ou apresenta mais do que uma, se não for capaz de as avaliar em termos de eficiência. Pelo contrário, os outros dois alunos não revelam preocupação em procurar estratégias alternativas às que apresentam, talvez consequência da já referida falta de reflexão sobre a eficiência do processo de resolução, no caso de Carlos ou porque, quando Gonçalo o faz na fase de planeamento, considera a sua estratégia a mais eficiente. No entanto, no decorrer das entrevistas, os alunos são capazes de referir outras maneiras para chegar ao mesmo resultado, revelando que este comportamento não advém da falta de conhecimentos mas sim da importância que atribuem a este processo.

A resolução de problemas envolve um ciclo marcado por várias fases (Pólya, 1975) que, como indicam Carlson e Bloom (2005), não podem ser seguidas de uma forma linear e ordenada. Por exemplo, as reflexões e decisões sobre a abordagem geral ao problema devem ocorrer antes da fase de execução e constituir um subciclo conjectura-imagina-avalia que pode implicar o desenvolvimento de um novo plano. Quando a fase de verificação resulta numa rejeição da solução, o resolvedor volta à fase de planeamento e repete o ciclo. Quando resulta na aceitação da solução, continua para outro ciclo plano-execução-verificação. Os dados analisados neste trabalho, relativos à turma, indicam uma clara tendência dos alunos em desenvolver uma actividade linear composta por apenas três etapas com o objectivo de resolver rapidamente os problemas: compreensão do problema, desenvolvimento de um plano e execução do plano. Os alunos estão bastante condicionados por uma visão em que o seu papel consiste, principalmente, em dar respostas às tarefas propostas pela professora. Deste modo, a evolução de uma actividade marcada por estas três fases depende da continuidade do trabalho desenvolvido com os alunos: uma maior experiência na resolução de problemas leva-os a perceber a não linearidade deste processo e a importância da última fase, que é a que permite o ciclo. Além disso, a análise dos casos individuais permite considerar também a influência de várias características dos alunos. De facto, dos três alunos estudados, Gonçalo é o único onde se observa o ciclo dentro da fase de planeamento. Todos voltam atrás quando não encontram solução mas só Luís repete o ciclo (embora só uma vez) depois de obter uma solução.

9.2. As aprendizagens realizadas

As tarefas de exploração e investigação realizadas durante a experiência de ensino têm uma relação estreita com os diversos tópicos programáticos da disciplina de Análise Numérica e são propostas aos alunos antes de estes serem abordados. A análise do trabalho realizado pelos alunos na exploração das tarefas propostas e do seu desempenho nos testes de avaliação permite concluir que se verificam aprendizagens significativas, ao nível de conceitos e procedimentos da Análise Numérica. Destacam-se os conceitos de intervalo e as respectivas regras de aritmética intervalar, de valor aproximado e erro ou os métodos da bissecção, de interpolação polinomial e ajuste curvas.

A análise de erros é o primeiro tópico do programa de Análise Numérica a ser abordado pois os conceitos de valor aproximado e erro são fundamentais para o trabalho a realizar nos outros tópicos da disciplina. Os alunos, habitualmente, demonstram dificuldade em perceber para que serve uma disciplina cujos resultados são valores aproximados e não valores exactos. Costumam, igualmente, aplicar os métodos numéricos de forma rotineira para obter uma solução que assumem como exacta, mesmo depois de lhes terem sido explicados os conceitos de erro e de valor aproximado. Os resultados deste estudo mostram que os alunos ultrapassam as dificuldades sobre a inexactidão das soluções e que compreendem estes conceitos, uma vez que os utilizam de forma correcta em várias tarefas e em diferentes contextos. De facto, os três alunos estudados como casos são capazes de identificar as fontes de erro, de escolher estratégias de resolução de forma a minimizá-los e de calcular diferentes tipos de erro, seleccionados de forma adequada ao método que aplicam e à quantificação que pretendem fazer desse erro. Mesmo nas situações em que não estão explícitos os erros associados aos dados e em que não lhes é solicitado o cálculo de erros associados às soluções que obtêm, os alunos reconhecem o 'estatuto' de valor aproximado dos dados que usam e das soluções que obtêm. Gonçalo vai ainda mais longe e relaciona estes conceitos com o conceito de intervalo, ao qual recorre, em diversas tarefas, sempre que associa um erro a uma solução. A compreensão do conceito de intervalo revela-se decisiva quando este aluno deduz as regras da aritmética intervalar com facilidade e de forma correcta, contrariamente a Carlos e Luís que apresentam dificuldades iniciais. Confirma-se, assim, a importância dos alunos estabelecerem conexões entre o seu conhecimento prévio (aquilo que já sabem) e o que têm que aprender, como sugerido por Gravemeijer (2005). No entanto, estas dificuldades, também verificadas ao nível da turma, são ultrapassadas quando os alunos, durante a discussão final da tarefa, atribuem significado a esse conceito. Estes resultados sugerem que as discussões e reflexões sobre as tarefas permitem uma melhor compreensão de conceitos e procedimentos de Análise Numérica.

A capacidade de aplicação de conhecimentos observa-se, igualmente, em relação a outros tópicos entretanto abordados na sala de aula, de um modo expositivo, como por exemplo a interpolação polinomial. Os três alunos são capazes de mobilizar estes conhecimentos recentes e de aplicá-los a novas situações, tanto na exploração das tarefas seguintes como nos testes de avaliação, embora este aspecto esteja mais saliente no trabalho de Gonçalo. No entanto, observam-se algumas dificuldades iniciais, também ao nível da turma, pois os alunos têm tendência para fazer uma escolha e aplicação rotineira desses conhecimentos. Mais uma vez, as discussões em grande grupo têm um papel crucial na evolução dos alunos para uma aplicação intencional, feita com base em decisões informadas (tendo em conta propriedades importantes dos dados e as características dos próprios métodos) e reflectidas (sobretudo em termos de eficiência de métodos e soluções). Isto porque a diversidade de estratégias que surgem durante a reflexão final da tarefa induz o confronto de opiniões e pode conduzir à resolução de conflitos, levando os alunos a ouvir e a explicar diferentes pontos de vista (Laborde, 1994). Deste modo, as discussões em grande grupo também facilitam o desenvolvimento do comportamento argumentativo dos alunos (Balacheff, 1991). Assim, os alunos beneficiam do trabalho realizado na exploração das tarefas seguintes também para reforçar as suas aprendizagens.

Na utilização de grande parte dos métodos numéricos verificam-se habitualmente outras dificuldades relacionadas com a aplicação das suas fórmulas, de forma rotineira e sem compreensão do seu significado. Deste modo, os alunos não reconhecem a sua utilidade e a aplicação (adequada) destes métodos em diferentes situações fica limitada. Os resultados deste estudo mostram que durante a exploração das tarefas propostas a generalidade dos alunos e, em particular, os casos individuais, são capazes de construir, de forma intuitiva, alguns procedimentos contemplados no programa da disciplina mas ainda não trabalhados nas aulas como, por exemplo, o método da bissecção e o método dos mínimos quadrados. A construção mais ou menos completa desses métodos depende das várias características dos alunos. Gonçalo chega mesmo a construir os métodos e a formalizá-los, enquanto Carlos e Luís apenas explicam, de forma descritiva, os procedimentos que estão na base da sua construção. O trabalho desenvolvido por Carlos, Gonçalo e Luís revela, ainda, que quando os alunos constroem os seus próprios métodos para resolver problemas desenvolvem uma forte compreensão e destreza sobre eles, como refere Waege (2008), facilitando a sua aprendizagem. De facto, é visível uma utilização adequada e correcta dos métodos construídos pelos alunos em tarefas seguintes e em situações diferentes, mesmo quando eles não são solicitados de forma explícita, indiciando uma aprendizagem significativa da sua parte. Além disso, os alunos passam a desempenhar um papel importante no processo de ensino-aprendizagem (Pirie, 1987). As tarefas confirmam-se, assim, como elemento de motivação para os alunos, que ganham também confiança nos seus conhecimentos e desenvolvem autonomia no processo de aprendizagem da Matemática, como preconizado no NCTM (1991).

A aprendizagem realizada pelos alunos não se esgota na aquisição de conhecimentos relativos aos tópicos da Análise Numérica. Como Frank (1988) realça, a aprendizagem da Matemática desenvolve-se lentamente ao longo da experiência matemática dos alunos e não é independente dela. Como a principal origem das suas experiências matemáticas é, em regra, a aula de Matemática, os alunos aprendem muito mais que os conteúdos matemáticos dessas experiências da sala de aula. Assim, os dados recolhidos confirmam as potencialidades das tarefas de exploração e investigação, já identificadas por outros autores (Goldenberg, 1999; Ponte e Matos, 1996), para desenvolverem capacidades e facilitarem a aprendizagem. Uma das capacidades que sobressai das actuais recomendações para o ensino da Matemática em vários níveis de ensino (AMATYC, 2006; MAA, 2003, 2004; NCTM, 2000) e que os alunos claramente desenvolvem é a comunicação matemática (escrita e oral). A relação entre a comunicação matemática e a resolução de problemas é uma consequência natural da necessidade dos alunos se envolverem na explicação, justificação e discussão de estratégias matemáticas e soluções, quando resolvem problemas (Brenner, Mayer, Moseley, Brar, Durán, Smith-Reed & Webb, 1997; Neria & Amit, 2004). Numa fase inicial da experiência de ensino são identificadas grandes dificuldades associadas aos registos escritos produzidos pelos três alunos. Depois desta fase, onde predominam as respostas curtas e não fundamentadas, Carlos, Gonçalo e Luís conseguem elaborar textos escritos bem organizados onde já relatam as explorações realizadas, as tentativas feitas e as justificações das conclusões a que chegam. Além disso, a experiência que adquirem na escrita dos relatórios parece influenciar a forma como respondem às questões dos testes e que se reflecte na melhoria das classificações obtidas. Esta evolução faz-se de forma gradual e diferenciada entre estes alunos e corresponde, de modo geral, ao comportamento observado na turma. No entanto, os alunos evidenciam sempre uma grande dificuldade na expressão escrita, talvez pela falta de prática na escrita de relatórios, sobretudo na disciplina de Matemática, o que sugere que só um trabalho continuado e focado nessa aprendizagem poderá ajudar a ultrapassar estas dificuldades.

Ainda no que diz respeito à capacidade de comunicação, é de salientar as exposições orais. As discussões em grupo podem ajudar os alunos a desenvolver capacidades de expressão que são essenciais para compreender e comunicar Matemática, senão mesmo para desenvolver raciocínio matemático (Ferrari, 2004). Isto requer uma mudança da ênfase da 'solução' para as explicações verbais que os três alunos analisados individualmente são capazes de realizar. De uma fase inicial, em que cada grupo apresenta as suas soluções e os ouvintes (restantes colegas) as aceitam como verdadeiras (talvez pelo receio de os prejudicar), os alunos passam a ter uma forte interacção onde estão presentes comportamentos argumentativos (Balacheff, 1991). Esta interacção entre os alunos favorece a realização de novas descobertas, mostrando-lhes outras abordagens e obriga-os a analisar as suas ideias e a justificá-las, quando questionados sobre elas.

Finalmente, é de referir que a experiência de ensino e, em particular, a realização das tarefas de exploração e investigação permite, ainda, uma compreensão vivida dos processos matemáticos envolvidos numa investigação e facilita, igualmente, o desenvolvimento do raciocínio na resolução de problemas.

9.3. A experiência de ensino vista pelos alunos

A estreita relação entre as concepções dos alunos acerca da Matemática e a sua experiência ao nível da sala de aula (o modo como ela é trabalhada) é estabelecida por diversos autores (Borasi, 1990; Frank, 1988; Schoenfeld, 1989, 1992). Além disso, as concepções dos alunos sobre a Matemática e sua aprendizagem condicionam o modo como se envolvem nas tarefas matemáticas, isto é, determinam a forma como abordam um problema, as técnicas que usam ou evitam e o tempo e esforço que dedicam ao problema (Matos, 1991; Schoenfeld, 1992). Assim, o estudo das concepções dos alunos pode contribuir para compreender o seu comportamento matemático.

De um modo geral, as respostas dadas pelos alunos aos questionários revelam uma atitude positiva em relação à Matemática. No entanto, o seu comportamento nem sempre é coerente com as opiniões manifestadas. Nos estudos de Borasi (1990) e de Frank (1988), os alunos tendem a caracterizar a Matemática como uma colecção de factos e procedimentos que é necessário memorizar e saber aplicar de modo adequado (segundo as regras) para obter uma resposta. Neste estudo, uma parte significativa dos alunos não limita a Matemática a um conjunto de conteúdos e integra, na sua definição, aspectos como o raciocínio ou a resolução de problemas, mostrando-se fortemente convictos que este processo é uma parte importante da disciplina. Este resultado pode indicar que a resolução de problemas constitui uma actividade que já tem uma certa expressão na prática lectiva, confirmando a tendência identificada em APM (1998).

Além disso, a maioria das respostas dadas pelos alunos no início da experiência de ensino são no sentido de desvalorizar a memorização e valorizar a compreensão da Matemática e dos seus processos de raciocínio. No entanto, apesar de esta visão sair reforçada após a realização das tarefas, na prática, uma parte significativa dos alunos ainda persiste em argumentar que é mais fácil e prático aplicar conceitos e procedimentos depois de abordada 'a matéria necessária'. Isto parece indiciar a existência de um carácter dual na visão dos alunos sobre a Matemática, como identifica Matos (1991), a Matemática prática ou automatizada e a Matemática que requer elaboração e raciocínio. Para este autor, a importância relativa de cada uma destas concepções varia de aluno para aluno e para alguns é claramente dominante uma visão centrada na utilização de algoritmos, regras e definições.

Uma possível explicação sugerida por alguns autores (Frank, 1988; Matos, 1991; Schoenfeld, 1992), é que estas contradições podem reflectir a influência das concepções dos seus professores e não emergir da própria experiência dos alunos com a Matemática escolar. De facto, os alunos ouvem muitas vezes falar da importância da resolução de problemas mas sem que a realidade da sala de aula se altere: quase todas as tarefas propostas são exercícios de aplicação de conhecimentos e as poucas excepções, que são de facto problemas, são tomadas como tarefas interessantes mas extra curriculares e, como tal, não constituem o foco da aprendizagem. Deste modo, os alunos são levados a separar a Matemática escolar (a que conhecem e experienciam nas salas de aula) da disciplina da criatividade, da resolução de problemas e da descoberta, acerca da qual ouvem falar mas que não experimentam de facto. Além disso, tendem a considerar as tarefas não rotineiras como não sendo verdadeiramente Matemática ou estando para além do que é 'normal' em Matemática, à semelhança do referido em Brocardo (2001).

Assim, o que conta nas situações de resolução de problemas é o comportamento dos alunos e este parece ser bem mais influenciado pelas suas experiências do que pelas concepções que afirmam professar (Schoenfeld, 1989). Embora os alunos deste estudo manifestem inicialmente um comportamento em que predominam as concepções ligadas à Matemática automatizada, também têm uma certa ideia da Matemática do raciocínio. Como refere Matos (1991), a experiência que os alunos vivem parece ter contribuído no sentido de conseguirem identificar argumentos sólidos que caracterizam esta visão. No entanto, o facto de esta experiência estar limitada no tempo e a uma única disciplina de Matemática, pode não lhes fornecer todos os argumentos necessários para alterarem as suas concepções, sobretudo os que têm concepções mais vincadas.

Esta razão pode ser também considerada para compreender a alteração pouco significativa que se verifica nas respostas dos alunos sobre a abstracção da Matemática. É usual os alunos pensarem que a Matemática que se aprende na escola tem pouco a ver com o mundo real, sobretudo no ensino superior em que é vista como uma disciplina muito abstracta. Esperava que os alunos, após a realização das tarefas de investigação, reconhecessem a aplicação e a utilidade prática dos conteúdos da disciplina de Análise Numérica e, por estar de algum modo relacionado, modificassem a sua perspectiva sobre esta característica da Matemática. De acordo com os resultados, isso não se verifica. Nos seus comentários finais, os alunos ainda procuram justificar a importância da Matemática, mas não conseguem desenvolver uma ideia centrada na utilidade para a vida. Também é possível que os alunos estejam a exprimir a sua opinião relativamente às disciplinas de Matemática tal como a conhecem nos moldes tradicionais (como as Análises ou a Álgebra), uma vez que a questão não está focada na Análise Numérica.

A tendência que os alunos têm em considerar que no trabalho em Matemática o mais importante é a obtenção de respostas correctas, também se reflecte no seu comportamento inicial na exploração das tarefas propostas, quando tentam obter rápida e linearmente (no sentido de Brocardo, 2001) uma resposta ou conclusão. No entanto, este aspecto é o que verifica maiores alterações no sentido das respostas dadas pelos alunos deste estudo, que são acompanhadas de uma mudança também ao nível do seu comportamento, confirmando, assim, que o trabalho desenvolvido nas tarefas de investigação contribui para que os alunos compreendam o seu carácter mais aberto, a existência de estratégias diversas e a importância dos processos de raciocínio no desenvolvimento do trabalho em Matemática.

Os resultados obtidos evidenciam uma satisfação generalizada dos alunos face à metodologia de ensino e aprendizagem utilizada na disciplina de Análise Numérica. A grande maioria mostra uma clara preferência por uma aprendizagem na qual desempenha um papel activo, em oposição ao seu habitual papel de simples receptores de conhecimentos e destaca as tarefas de investigação como um dos aspectos positivos da experiência de ensino e o factor que mais contribui para estabelecer um ambiente favorável à sua participação, mostrando acordo com as ideias defendidas por Pirie (1987). De facto, a visão de que o papel dos alunos consiste essencialmente em estar com atenção nas aulas, estudar e fazer os trabalhos de casa é posta em causa com o decorrer da experiência de ensino e os alunos passam a ter um certo prazer em desenvolver um trabalho mais autónomo relativamente à professora, na exploração das tarefas propostas.

As alterações experimentadas em relação ao tipo de trabalho que consideram usual nas aulas de Matemática (novos hábitos de trabalho e de estudo) contribuem, igualmente, para que os alunos deixem de ver a disciplina como uma actividade solitária. É natural, por isso, que expressem particular agrado pelo trabalho de grupo e pelas discussões com toda a turma. Os argumentos que justificam estas opiniões são diversos. Durante a exploração das tarefas na sala de aula, os alunos organizam-se de forma a que todos sintam que a sua actuação é útil, não só para si próprios mas fundamentalmente para o grupo e não deixam lugar a que uns trabalhem e outros apenas observem, proporcionando assim uma interdependência positiva (como a referida em Freitas & Freitas, 2002). Os casos estudados individualmente permitem especificar um pouco mais este aspecto.

Carlos, durante a entrevista, sublinha a importância dos grupos não serem sempre constituídos pelos mesmos alunos e explica que esta 'rodagem' entre diversos grupos permite identificar as várias formas de trabalhar de cada aluno e isso facilita depois a atribuição de tarefas e responsabilidades tornando o trabalho mais produtivo. Embora este aluno não faça referência aos ganhos individuais que esta forma de organização do trabalho de grupo permite, os comentários finais dos alunos realçam a sua importância para ganhar confiança na capacidade de fazer Matemática, sobretudo para os alunos que manifestam maiores dificuldades em desenvolver uma actividade de investigação. Estes resultados confirmam, assim, que o ambiente vivido em cada grupo pode influenciar a evolução individual dos alunos, como defende Brocardo (2001).

Nas suas opiniões finais, também salientam a importância da partilha de informação entre colegas e é evidente a importância que atribuem ao trabalho de grupo como uma forma de auxílio nos momentos de dificuldade que surgem na realização das tarefas de investigação, aspecto já identificado no estudo de Cruz e Martinón (1998). Além disso, os alunos reconhecem as potencialidades das tarefas realizadas na promoção da sua aprendizagem. As discussões suscitadas pela realização de tarefas de investigação permitem um alargamento e aprofundamento de conhecimentos (não só de conceitos e procedimentos da disciplina mas também dos processos matemáticos e estratégias de resolução de problemas) contribuindo para uma maior compreensão e capacidade de enfrentar problemas, facilitando, assim, a aprendizagem.

No entanto, as referências positivas mais significativas talvez sejam em relação à motivação e auto-confiança dos alunos, argumentos frequentemente referidos para apoiar a introdução das investigações na aula de Matemática (Goldenberg, 1999; Jaworski 1994; Pirie, 1987). Os resultados realçam a importância destes dois aspectos no modo como os alunos se envolvem e evoluem na exploração de investigações matemáticas. De facto, ao longo de todo o semestre, é notório o entusiasmo e o empenho da grande maioria dos alunos nas aulas dedicadas à exploração das tarefas de investigação e na elaboração cuidada dos relatórios escritos em tempo extra-lectivo. Os seus comentários no questionário final esclarecem que a motivação induzida pelas tarefas não advém necessariamente dos assuntos abordados mas está relacionada, sobretudo, com o seu carácter mais aberto e desafiante e o tipo de trabalho desenvolvido. No final da experiência é visível, até, um certo prazer em explorar diferentes possibilidades e relações sentindo-se um interesse genuíno pela investigação em si. A auto-confiança é identificada por Niss (1996) como um dos elementos a ter em conta ao nível do desenvolvimento da personalidade do aluno, ao lado do desenvolvimento de atitudes de investigação e exploração. Além disso, um dos objectivos apontados no NCTM (1991) para todos os alunos é o de adquirir confiança na sua própria capacidade de fazer Matemática. O comportamento dos alunos na primeira tarefa reflecte alguma insegurança nas suas capacidades para explorar as tarefas propostas, sobretudo devido à sua falta de experiência neste tipo de trabalho. No entanto, a experiência continuada na exploração de tarefas de investigação favorece uma progressiva confiança no trabalho que podem desenvolver sem recorrer sistematicamente ao apoio da professora, revelando-se sempre bastante autónomos. Este aspecto da confiança nas suas capacidades é também mencionado, com frequência, nas opiniões dos alunos no questionário final e parece ter um papel importante no esforço que fazem em procurar perceber os aspectos em que devem investir para melhorar a sua forma de trabalhar.

Apesar destas opiniões positivas, os alunos relatam, também, algumas dificuldades e desagrados em relação à nova forma de trabalho induzida pelas tarefas de investigação. Porfírio (1993) refere as dificuldades iniciais dos alunos em se envolverem autonomamente na resolução de problemas e mesmo a preferência de alguns deles por um ensino tradicional. Também neste estudo, no final da experiência de ensino, contabilizam-se algumas opiniões que exprimem preferência pelas aulas onde a resolução de exercícios é prática corrente, embora não critiquem a metodologia utilizada. A atitude destes alunos pode estar relacionada com as mudanças nos hábitos de trabalho, normalmente associados ao ensino centrado no professor e às metodologias transmissivas, às quais os alunos podem ter dificuldades de adaptação. Além disso, o trabalho independente (como o processo de Bolonha preconiza) e com tarefas deste tipo ainda está pouco presente e, por isso, um primeiro contacto com este tipo de tarefas, além do mais limitado no tempo, pode não ser suficiente para a alterar. No entanto, a grande maioria dos alunos evolui e, progressivamente, ganha gosto por desenvolver um trabalho que não consiste apenas em seguir regras e defende o alargamento das aulas dedicadas à exploração das tarefas, inclusivamente, noutras disciplinas.

No entanto, a maior dificuldade sentida por grande parte dos alunos é na escrita dos relatórios, notando-se alguns factores que contribuem para este facto. Como noutros estudos (por exemplo, Brocardo, 2001), os primeiros relatórios produzidos pelos alunos apresentam-se muito incompletos, valorizando sobretudo os produtos relativamente aos processos, reduzindo-se a uma enumeração das descobertas feitas, sem explicações das mesmas e sem apresentar quaisquer justificações. Estes relatórios vão evoluindo, em parte devido à compreensão que os alunos adquirem dos processos associados a esta actividade, mas também com o auxílio dos comentários feitos pela professora. No entanto, os alunos evidenciam sempre uma grande dificuldade na expressão escrita.

Além disso, os alunos sentem que a realização dos relatórios é uma actividade muito exigente, quer em termos de ocupação de tempo quer em termos de avaliação, pois, como referem, nunca está tudo certo. A escassez de tempo é um dos principais obstáculos sentidos pelos alunos na elaboração dos relatórios. Segundo alguns deles, o facto de serem feitos em período extra-lectivo (fora das aulas) ocupa muito do tempo que pode ser dedicado à resolução de exercícios ou ao estudo de outras disciplinas. É verdade que a ocupação e as obrigações diárias destes alunos estão muito para além do que é habitual no ensino não militar e são diferenciadas para cada aluno, pelo que a gestão do (reduzido) tempo disponível traz sempre dificuldades acrescidas. Assim, estas opiniões também podem estar associadas à já referida identificação de alguns alunos com um ensino tradicional em que a resolução de exercícios é o foco do seu trabalho/estudo. Isto porque, quando o relatório da terceira tarefa é realizado na sala de aula, também surgem opiniões reclamando 'a falta de tempo' mas, desta vez, para reflectir sobre o trabalho realizado, aprofundá-lo e tornar o relatório mais completo.

Os relatórios estão, ainda, na base de outras opiniões negativas registadas e que se prendem com o facto da sua avaliação contribuir para a classificação final dos alunos. Apesar da metodologia de ensino-aprendizagem ser diferente, os alunos continuam a estar sujeitos a ser avaliados e, portanto, conceptualizam o objectivo da actividade matemática como a resolução de tarefas com vista a ter sucesso escolar (Matos, 1991). Se a avaliação dos alunos é realizada com base num instrumento que sentem ser gerador de dificuldades, estes têm tendência para o ver como um obstáculo ao seu sucesso. As já referidas dificuldades iniciais na elaboração dos relatórios induzem, nos alunos, o receio de insucesso na disciplina. No entanto, no decorrer da experiência de ensino, com a evolução positiva que se observa na escrita dos relatórios e que se reflecte nas classificações neles obtidas, os alunos sentem que esta forma de avaliação não os prejudica e passam a valorizá-la enquanto contributo importante para uma diversificação de formas de avaliação. Este aspecto é, aliás, objecto de comentários positivos dos alunos que afirmam que essa diversificação permite uma melhor avaliação e facilita, assim, o seu sucesso. E justificam que consideram que o desempenho de cada aluno está relacionado com as suas características individuais que determinam, igualmente, a sua preferência por um ou outro modo de avaliação (no caso deste estudo, são essencialmente testes e relatórios escritos).

Dado o exposto, parece poder afirmar-se que as mudanças no ambiente de trabalho e nas experiências vividas pelos alunos, ao longo do semestre, contribui para alterar as atitudes dos alunos face à Matemática e as suas concepções sobre o processo de ensino-aprendizagem. Além disso, o trabalho realizado na exploração de tarefas de investigação é vista pelos alunos como uma experiência marcante e positiva para a sua aprendizagem.

9.4. A experiência de ensino vista pela professora

Os resultados apresentados resultam da implementação de uma experiência de ensino que visa promover a aprendizagem de conceitos e métodos fundamentais de Análise Numérica através de uma abordagem de natureza investigativa. Procuro organizar o ensino de modo a que as tarefas de exploração e investigação constituam o contexto de abordagem de uma grande parte dos temas programáticos da disciplina e que a sua exploração permita, por um lado, a aquisição de conhecimentos de vários tipos relativos à Análise Numérica e, por outro lado, constitua uma oportunidade de os alunos desenvolverem um maior conhecimento relativo aos processos matemáticos envolvidos na actividade de investigação e na resolução de problemas. No entanto, apesar das tarefas terem uma importância decisiva na organização da experiência de ensino realizada, esta conta com uma diversidade de outras propostas de trabalho que surgem com a intenção de integrar uma série de elementos considerados fundamentais.

Depois de estabelecer um conjunto de conceitos chave e de relações entre eles, bem como diversos conceitos e procedimentos subordinados e suas relações com os anteriores, defino o tipo de propostas a associar a cada um dos tópicos a tratar (aulas de carácter mais expositivo, resolução de exercícios e problemas, trabalho extra-lectivo e testes escritos) de acordo com o tempo disponível. Alguns tópicos programáticos da disciplina são concebidos para incluir momentos de trabalho com tarefas de investigação (aritmética intervalar, equações não lineares, ajuste curvas e integração numérica), enquanto outros tópicos não são abordados a partir deste tipo de tarefas (interpolação polinomial e equações diferenciais). Esta opção não tem a ver com a identificação de alguma dificuldade em fazê-lo mas está relacionada, apenas, com a gestão do tempo disponível para a disciplina. A minha experiência anterior (Henriques, 2006) mostra que a realização das tarefas de investigação na sala de aula é uma actividade que ocupa bastante tempo, sobretudo se os alunos não têm experiência prévia com este tipo de trabalho. Em todo o caso, tenho sempre a preocupação de que as tarefas tenham repercussões em momentos de trabalho posteriores, quer como trabalho extra-lectivo, quer com a recuperação e análise, em aulas subsequentes, de resultados, ideias e processos produzidos pelos grupos de trabalho. Segundo Mason, Burton e Stacey (1982), a analogia entre o que se está a estudar e situações anteriormente investigadas pode ser útil para sugerir modos de abordagem. A sequência de conteúdos programáticos abordados nas tarefas é, também, um factor que me parece favorecer a utilização dos processos matemáticos e a aprendizagem da Análise Numérica. Essencialmente, o que o estudo permite dizer acerca do papel das tarefas é que estas devem ser parte integrante do processo de ensino-aprendizagem e não terem o estatuto de situações pontuais ou o de uma componente marginal ou secundária do trabalho a desenvolver. Deste modo, embora não seja possível afirmar que a metodologia usada permite explorar todos os temas do programa da disciplina, parece ser viável para explorar a totalidade ou, pelo menos, uma grande parte deles.

A análise dos resultados relativos ao trabalho desenvolvido pelos alunos, durante o semestre, permite discutir as potencialidades e as dificuldades das várias opções metodológicas adoptadas ao longo da experiência ensino. Uma das minhas opções prende-se com a definição geral do modo de explorar as tarefas de investigação. Após a distribuição do enunciado escrito, que introduz a tarefa, os alunos exploram-na em pares ou em pequenos grupos. Esta organização de trabalho em grupo parece ter dado algum contributo no sentido de possibilitar o confronto de estratégias e de pontos de vista (tal como apontado por Christiansen & Walther, 1986). Deste modo, esta forma de trabalhar confirma-se como adequada para apoiar uma maior compreensão dos conceitos e procedimentos de Análise Numérica e do próprio processo de investigar. Um outro aspecto relacionado com o trabalho em grupo que não é foco da minha reflexão inicial é a formação dos grupos. Ao dar livre opção aos alunos para formarem os seus grupos de trabalho, estou à espera que o façam de acordo com as suas afinidades e que se mantenham. No entanto, a grande maioria dos alunos opta por integrar diferentes grupos, nas várias tarefas, de modo a optimizar o trabalho a desenvolver e as suas aprendizagens.

Assim, o trabalho em grupo contribui também para desenvolver um trabalho cooperativo entre os alunos (no sentido de Freitas & Freitas, 2002).

Greenes e Findell (1999) sugerem que, para o desenvolvimento do raciocínio matemático, se deve solicitar aos alunos que, por escrito ou oralmente, descrevam o seu pensamento, justifiquem as suas soluções e reflictam sobre as várias estratégias de resolução de problemas (suas ou de outros colegas). Este é um dos motivos que me leva a solicitar aos alunos que, no final de cada tarefa, apresentem relatórios escritos descrevendo o trabalho realizado. A elaboração de relatórios de exploração das tarefas, onde os alunos apresentam as suas explorações e os seus resultados, constitui uma completa novidade para os alunos e, por isso, é objecto de alguma atenção da minha parte. Os meus comentários escritos de apreciação detalhada em que são feitas sugestões para melhorar e aprofundar a exploração da investigação e a valorização da classificação obtida em cada relatório na avaliação da aprendizagem dos alunos parecem ser opções importantes para ajudar os alunos a produzir textos escritos com alguma qualidade e a empenharem-se bastante mais na compreensão dos processos que fazem parte de uma investigação. A evolução dos alunos relativamente à tendência inicial de elaborar respostas curtas em que não integram qualquer justificação sobre o processo seguido para uma situação em que passam a elaborar textos que explicam com bastante detalhe o trabalho realizado na exploração das tarefas confirmam, também, que a reflexão sobre as investigações que os alunos fazem é essencial para que possam tomar consciência dos processos seguidos, como referem Silva et al. (1999). Em relação a este aspecto, os casos estudados individualmente não se distinguem da atitude geral de empenhamento revelada pelos restantes alunos da turma.

As discussões em grande grupo, onde os alunos apresentam, oralmente, na aula, os resultados, ideias e raciocínios desenvolvidos por cada grupo em cada tarefa, têm também como objectivo a promoção da reflexão sobre o trabalho realizado, favorecendo a exteriorização das suas ideias, a explicitação dos seus raciocínios e o confronto de diferentes estratégias e resultados. Durante a apresentação de cada grupo solicito aos restantes alunos que constituam uma audiência com uma intervenção crítica e de pedido de esclarecimentos. Inicialmente verifico alguma inibição, receio de prejudicar os colegas e uma maior propensão para ouvir do que para intervir. No entanto, esta atitude altera-se ao longo da experiência de ensino e a opção revela-se válida para que os alunos aprendam a valorizar mais a apresentação da sua forma de pensar e não apenas os resultados obtidos. Deste modo, estas discussões constituem momentos importantes de aprendizagem significativa.

Algumas vezes, estas discussões permitem uma exploração de outros assuntos e suscitam a introdução de tópicos programáticos a desenvolver nas aulas de natureza expositiva. Deste modo, as tarefas propostas tornam-se também uma forma de introduzir e apresentar novos conceitos, através de sínteses teóricas feitas por mim depois de terminada a discussão da tarefa. Estas discussões mostram-se, ainda, particularmente adequadas para apoiar a evolução dos alunos relativamente ao processo de investigar, nomeadamente clarificando o estatuto de uma conjectura e a necessidade de as justificar. À semelhança do que ocorre em Brocardo (2001), os conhecimentos e a experiência destes alunos nem sempre permite a justificação das suas conjecturas, ficando limitada esta fase da actividade de investigação. No entanto, esta opção não significa uma falta de preocupação com este aspecto que é, ao longo do semestre, explicitamente trabalhado com os alunos. Estes, embora necessitando de tempo para evoluir, conseguem fazê-lo mostrando, no final da experiência de ensino, entender a importância da justificação de uma conjectura e considerá-la como parte integrante da actividade de investigação. Os dados sugerem que a opção de trabalhar tarefas em que os alunos não podem provar as suas conjecturas, desde que não signifique ignorar sistematicamente esta fase da actividade de investigação, é adequada.

Quando planeadas, as discussões e reflexões finais de cada tarefa têm também o intuito de alargar a exploração à formulação e análise de outras questões que podem conduzir a novas investigações. Esta intenção inicial parece constituir uma opção em que faz sentido investir de modo a proporcionar aos alunos uma vivência mais completa do que é a actividade de investigação (Brocardo, 2001). No entanto, isso não é concretizado com grande regularidade sobretudo devido a condicionantes de ordem prática. A exploração das tarefas na sala de aula e as discussões em grande grupo (com a turma) exigem o dispêndio de bastante tempo, sobretudo quando realizadas por alunos sem experiência na realização de tarefas de investigação. As dificuldades iniciais dos alunos em explorar adequadamente as tarefas, exigem uma concentração de esforços na compreensão de aspectos de base do processo de investigar e leva-me a decidir por dar um menor destaque às diferentes questões que podiam ser formuladas a partir da situação inicial proposta. Além disso, uma vez que a exploração das investigações é vista como o contexto a partir do qual decorre a introdução de conhecimentos e conceitos da disciplina, o propósito inicial com que proponho as tarefas, privilegia, à partida, determinados caminhos. Ao nível das aulas, isto traduz-se no pouco investimento colocado na exploração de outras questões que podem decorrer da análise da situação inicial proposta. Assim, embora seja dada liberdade aos alunos para decidir sobre as suas explorações, a discussão de caminhos divergentes é bastante limitada. Encarar a exploração de investigações como o contexto a partir do qual decorre a introdução de conhecimentos parece, pois, dificultar uma vivência substancial do carácter divergente de uma investigação.

No entanto, a opção mais difícil de tomar em relação à experiência de ensino tem a ver com o meu papel, enquanto professora, nos diferentes momentos da sua realização (Ponte, 2002). Além de conduzir o processo de ensino-aprendizagem, a minha função nas actividades de investigação, em especial, é muito importante, visto que tenho que decidir que tipo de apoio dar aos alunos e preciso de estar preparada para orientar e auxiliar o seu trabalho. Como refere Valério (2004), o apoio apropriado do professor pode ser encorajar os alunos a trabalhar cooperativamente ou a escutar as explicações de outro. Pode ter que colocar questões provocatórias ou entrar num diálogo socrático com os alunos. Pode ainda facilitar um diálogo ou ajudá-los a explicar o seu pensamento. Por isso, durante a exploração das tarefas, oriento e auxilio os alunos mas mantenho-me como um recurso disponível e só interfiro quando necessário. Tal como recomendado por Freitas e Freitas (2002), estou atenta ao que se passa nos vários grupos para fazer eventuais intervenções e assumo a posição de um consultor/facilitador. Como professora, também é gratificante perceber a evolução dos alunos, quando tentam resolver os problemas autonomamente e quando tenho a oportunidade de observar cooperação entre eles, quer dentro dos grupos, quer entre colegas dos outros grupos no sentido de aprender e entender as tarefas propostas.

Naturalmente que os resultados descritos, relativos ao trabalho desenvolvido pelos alunos na realização das tarefas de investigação e na resolução de problemas não podem ser separados do ambiente de aprendizagem que se verifica ao longo do semestre e cuja principal característica é assumir a exploração das tarefas de investigação como metodologia de ensino-aprendizagem. Este foi essencialmente marcado por uma boa relação com a professora e uma grande autonomia e responsabilidade da parte dos alunos em cumprir as tarefas acordadas. Além disso, ao encarar a exploração de tarefas de investigação matemáticas como uma metodologia privilegiada no processo de ensino-aprendizagem permite que a construção de conceitos e a aquisição de conhecimentos de diversos tipos decorram da experiência matemática dos alunos e, assim, concretizar a indicação defendida por vários autores (Hadammard, 1945; Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003) de que a actividade matemática dos alunos deve consistir essencialmente em experimentar, ao seu nível de maturidade, o trabalho dos matemáticos profissionais.

Capítulo 10

Conclusões

Neste capítulo começo por apresentar uma síntese do estudo. De seguida, tendo em consideração os objectivos e as questões de investigação enunciadas, apresento as suas principais conclusões. Concluo com uma breve reflexão pessoal sobre os seus contributos para o meu desenvolvimento enquanto investigadora e professora e formulo algumas recomendações para trabalhos futuros neste domínio.

10.1. Síntese do estudo

O presente estudo descreve e analisa os processos de raciocínio que os alunos do ensino superior usam na realização de actividades de investigação na disciplina de Análise Numérica e de que forma isso contribui para a sua aprendizagem de conceitos e procedimentos nesta disciplina. Considerando este objectivo, identifico dois grupos de questões de investigação a que procuro dar resposta. Um primeiro grupo de questões foca-se nas características do trabalho desenvolvido pelos alunos na exploração de tarefas de investigação e na resolução de problemas:

1. Que tipo de representações matemáticas os alunos constroem na resolução de problemas e na realização de actividades de investigação em Análise Numérica e que dificuldades evidenciam no seu uso?
2. Que processos matemáticos usam e que dificuldades manifestam os alunos na realização de tarefas de investigação em Análise Numérica?
3. Que estratégias de raciocínio utilizam e que dificuldades evidenciam os alunos na resolução de problemas em Análise Numérica?

Com uma última questão, procuro perceber quais as potencialidades das actividades de investigação na promoção das aprendizagens dos alunos:

4. Quais as aprendizagens realizadas pelos alunos e de que modo a experiência de ensino contribui para a compreensão que os alunos evidenciam dos conceitos e procedimentos de Análise Numérica?

No quadro teórico abordo três temas essenciais para o desenvolvimento deste estudo: (i) pensamento matemático avançado; (ii) problemas e actividades de investigação; e (iii) representações matemáticas. No primeiro, clarifico o que se entende por pensamento matemático avançado e faço referência a teorias cognitivas com ele relacionadas. No segundo, aprofundo o modo de entender os problemas e as investigações matemáticas e discuto vários aspectos relacionados com a sua integração na sala de aula. Finalmente, no terceiro, descrevo diferentes modos de representação e discuto a importância das representações no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Tendo em conta os objectivos definidos, este estudo segue uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa, baseada em estudos de caso e integrando uma vertente de experiência de ensino. Os alunos participantes nesta experiência são do 2.º ano da Escola Naval e pertencem aos cinco mestrados integrados conferidos por esta instituição. Entre os participantes são seleccionados três alunos – Carlos, Gonçalo e Luís – que são objecto de análise em três estudos de caso. A experiência de ensino, que constitui o ponto de referência central deste estudo, tem por base a realização de tarefas de investigação, durante o 1.º semestre do ano lectivo de 2008/09, na disciplina de Análise Numérica. Uma parte significativa das aulas é utilizada para a realização de quatro tarefas de investigação concebidas de modo a constituir oportunidades para os alunos desenvolverem um maior conhecimento relativo aos processos matemáticos envolvidos na actividade de investigação e, ao mesmo tempo, representar contextos para abordar tópicos do programa de Análise Numérica. Os alunos são confrontados com problemas para os quais não têm teoria nem modelo que lhes permita fazerem um tratamento completo, pelo que são desafiados a desenvolver e defender as suas próprias estratégias. Durante a exploração das tarefas, trabalham em pares ou em pequenos grupos. No final da exploração de cada tarefa, apresentam à turma, oralmente, o trabalho desenvolvido e são solicitados a escrever um relatório a explicar as estratégias usadas e a apresentar e justificar as suas conclusões. Deste modo, as tarefas de investigação propostas promovem a comunicação e proporcionam experiências de aprendizagem significativas para o desenvolvimento do raciocínio matemático e para a aprendizagem de conceitos e procedimentos. Tendo em conta a importância da diversificação de tarefas na aprendizagem, as restantes aulas contemplam exposições teóricas dos conteúdos programáticos, alguns dos quais trabalhados durante as tarefas de investigação, bem como oportunidades para a resolução de problemas e de exercícios de aplicação e consolidação de conhecimentos adquiridos.

A recolha de dados inclui a observação dos alunos na realização de tarefas de investigação, os seus relatórios escritos, o registo áudio das entrevistas individuais realizadas aos alunos objecto de estudos de caso, após a exploração de cada tarefa, e inquéritos aplicados a todos os participantes.

10.2. Principais conclusões do estudo

As conclusões principais deste estudo, inferidas dos dados analisados nos capítulos anteriores, estão organizadas segundo quatro pontos, tendo em conta os seus objectivos e as respectivas questões de investigação: (i) representações matemáticas e dificuldades manifestadas; (ii) processos matemáticos utilizados e dificuldades manifestadas; (iii) estratégias de resolução de problemas e dificuldades manifestadas; e (iv) aprendizagens realizadas.

Representações matemáticas utilizadas e dificuldades manifestadas. Da análise dos resultados destaca-se, como aspecto significativo, a variedade de representações que os alunos são capazes de utilizar, associadas às diferentes funções que desempenham na exploração das tarefas de investigação propostas.

Os alunos têm tendência para privilegiar a representação algébrica na exploração das tarefas de investigação. Mesmo quando conhecem e têm à sua disposição outras representações que permitem abordagens mais eficientes, optam por usar manipulação algébrica para deduzir regras ou para encontrar soluções. Só quando este modo de representação não permite encontrar soluções ou quando são solicitados a apresentar estratégias alternativas de resolução é que recorrem a outras representações. No entanto, a utilização da representação algébrica nem sempre permite que os alunos detectem conflitos e erros nas suas soluções e identifiquem padrões no comportamento de valores numéricos que facilitem a selecção de métodos de resolução mais eficientes.

A representação gráfica só surge quando explicitamente solicitada ou quando os alunos não têm disponíveis, entre os seus recursos, outras representações para usar. De forma geral, os alunos usam a representação gráfica para obter soluções, explicar raciocínios e verificar resultados e, raramente, para planearem e seleccionarem as suas estratégias. Este comportamento parece ser induzido pela prática escolar dos alunos em níveis educativos anteriores e estar relacionado, por um lado, com o conforto na aplicação rotineira de procedimentos algébricos com os quais estão mais familiarizados e, por outro lado, com a crença que o uso de representações gráficas constitui um raciocínio pouco formal, matematicamente inaceitável no ensino superior. No entanto, no decorrer da experiência de ensino, a generalidade dos alunos modifica este comportamento inicial e observa-se um aumento gradual do recurso à representação gráfica para analisar e desenvolver compreensão sobre a informação disponibilizada no enunciado, como suporte e ilustração de raciocínios e para confirmar resultados obtidos através de outras formas de representação. No final do semestre os alunos são ainda capazes de planearem e seleccionarem as suas estratégias com base na análise de gráficos e, deste modo, a representação gráfica passa a ter um papel importante na justificação dos seus raciocínios e das soluções encontradas. É de salientar, também, que, quando os alunos começam a utilizar a representação gráfica para confirmar os resultados obtidos numericamente são capazes de detectar os problemas nas soluções algébricas apresentadas e de resolver os conflitos entre essas soluções e as suas intuições.

Os alunos também só utilizam figuras geométricas quando outro tipo de representação não permite obter soluções. No entanto, são capazes de as utilizar de forma adequada para processar as informações disponíveis e para explorar propriedades. Para além disso, as figuras utilizadas pelos alunos servem também para auxiliar nas decisões estratégicas e para mostrar e justificar os seus raciocínios, revelando que compreendem o importante papel das representações visuais na procura de soluções para problemas matemáticos e na justificação de estratégias e resultados. Os alunos ainda são capazes de identificar as limitações associadas à utilização de determinadas figuras e de as reconfigurar (ou refinar) para permitir a obtenção de soluções mais exactas.

A tabela é outra representação que os alunos utilizam, com alguma frequência, para organizar e apresentar dados e resultados de cálculos. Além disso, recorrem à representação tabelar também com o objectivo de facilitar a identificação da informação necessária à realização de cálculos e a própria execução desses cálculos que conduzem à obtenção de soluções. Outras vezes, ainda, as tabelas que os alunos constroem permitem fazer emergir novos dados, realizar inferências sobre a existência de relações desconhecidas ou mostrar a necessidade de distinções que até então não tinham sido tidas em conta. Embora mostrem facilidade na sua utilização, nalgumas situações a escolha deste tipo de representação parece ser induzida pela sua experiência escolar anterior.

Os alunos utilizam a linguagem natural para reflectir sobre as situações e para descrever e justificar os seus raciocínios e os processos de obtenção de soluções, mesmo quando estas são obtidas com base noutras representações. Esta atitude parece ter a ver com as dificuldades que enfrentam quando, ao tentarem justificar os seus raciocínios e soluções, encontram os argumentos sintácticos insuficientes, e são conduzidos a apresentar a sua argumentação em palavras. No entanto, quando são solicitados a generalizar resultados ou a formalizar as suas respostas, parecem considerar a linguagem natural inadequada e, quando lhes é possível, complementam-na com alguma notação simbólica. Apesar disso, a utilização de notação simbólica parece ser uma das dificuldades que emergem da actividade matemática destes alunos, uma vez que as expressões simbólicas que apresentam estão, algumas vezes, incompletas e nem sempre traduzem, de forma adequada, o que é correctamente descrito informalmente.

Ao longo da experiência de ensino os alunos desenvolvem as suas capacidades linguísticas que são essenciais para compreender e comunicar Matemática. Assim, de uma situação em que utilizam a linguagem natural sem grande propriedade e que, por isso, nem sempre expressam o que querem dizer, os alunos evoluem para uma utilização cuidada e rigorosa das palavras e aprendem a desenvolver argumentos semânticos convincentes. Já em relação à linguagem simbólica, a sua evolução não é tão significativa. Embora, no final do semestre, entendam a importância de uma correcta utilização da notação simbólica e desenvolvam esforços nesse sentido, as dificuldades mantêm-se.

Relativamente ao trabalho com diferentes representações, todos os alunos parecem ter beneficiado com as tarefas realizadas. Durante a experiência de ensino os alunos aprendem a fazer escolhas mais razoáveis acerca das representações e evoluem para a utilização intencional de diferentes formas de representação onde a tradução entre elas constitui prática corrente.

Finalmente, estes resultados apoiam a ideia que devem ser dadas oportunidades aos alunos para ganhar experiência no uso de diversas representações matemáticas e para estabelecerem ligações entre elas. A realização das tarefas de investigação propostas, integradas no processo de ensino-aprendizagem da Análise Numérica, parece cumprir esse propósito.

Processos matemáticos utilizados na realização das tarefas de investigação e dificuldades manifestadas. O trabalho dos alunos nas várias tarefas realizadas ao longo da experiência de ensino tem características diferentes relativamente à utilização, ou não, de determinados processos característicos da actividade matemática e parece ter sido influenciado por diversos factores.

Os processos de registo e organização dos dados estão presentes no trabalho realizado pelos alunos em todas as tarefas e, embora numa fase inicial esses registos não sejam significativos das suas descobertas, a sua evolução faz-se de forma gradual.

A formulação de questões é um processo que não está formalmente contemplado no trabalho desenvolvido pelos alunos, uma vez que logo no início da exploração das tarefas emergem as primeiras conjecturas já sob a forma de afirmações. Esta dificuldade mantém-se ao longo da experiência de ensino, mesmo depois de adquirirem uma certa experiência na exploração de tarefas de investigação e manifestarem alguma compreensão dos processos matemáticos associados à exploração de tarefas deste tipo. Assim, esta atitude dos alunos parece estar mais relacionada com as concepções sobre o seu papel enquanto aluno (a obtenção de respostas/conclusões para as tarefas matemáticas propostas pelo professor) do que com a inexperiência na actividade investigativa.

A formulação de conjecturas é o processo que surge mais automática e frequentemente durante a actividade dos alunos, embora estes nem sempre o façam de forma explícita e correcta. Além disso, a utilização deste processo é diferente de aluno para aluno e parece ser influenciada pelas características do seu trabalho, nomeadamente pelas estratégias a que este recorre na procura de regularidades. As conjecturas formuladas pela generalidade dos alunos emergem de forma imediata, quase sempre baseadas em analogias, na identificação de padrões com base na observação de exemplos (geralmente os que são apresentados no enunciado) ou na experimentação de casos únicos ou sem sistematização aparente. O carácter pouco organizado da exploração realizada pelos alunos e a ausência de sistematização nem sempre permitem a determinação de propriedades matemáticas relevantes para o processo de generalização seguinte, que fica dificultado. Deste modo, as conjecturas apresentam-se, algumas vezes, incompletas ou mesmo incorrectas. Alguns destes alunos também parecem não compreender a utilidade do processo de generalização para alargar o âmbito de aplicação de uma conjectura e têm tendência para considerar a generalização como um simples processo de formalização, isto é, apresentam a descrição da conjectura em notação simbólica. Há no entanto alunos que recorrem também a gráficos e a esquemas visuais e numéricos que eles próprios constroem com o objectivo de facilitar a identificação de padrões e a determinação de propriedades matemáticas fundamentais para uma generalização correcta das suas conjecturas. Algumas vezes, os alunos também são capazes de formular as suas conjecturas com base em processos dedutivos, tendo em conta conceitos e propriedades matemáticas. Nestas situações, as conjecturas formuladas pelos alunos apresentam-se, de modo geral, correctas, excepto quando estes partem de premissas erradas.

A formulação de várias conjecturas simultâneas que resultam de várias explorações ou da assumpção de pressupostos diferentes, no sentido de alargar a exploração, não é um processo habitual no trabalho dos alunos. No entanto, no final da experiência de ensino, os alunos são capazes de propor formulações alternativas ou reformulações no sentido de refinar as conjecturas formuladas, melhorando os resultados iniciais.

O teste e a justificação de conjecturas são processos que têm uma presença muito reduzida no trabalho dos alunos e surgem poucas vezes de forma espontânea. Numa fase inicial, os alunos têm tendência para formular conjecturas de forma implícita e a aceitá-las como conclusões, não sentindo necessidade de as testar. Esta tendência parece estar mais relacionada com a sua inexperiência na realização deste tipo de tarefas e a dificuldade em perceber características importantes do processo de investigação do que com as dificuldades relacionadas com a realização de testes. Com o decorrer da experiência de ensino e com a exploração das tarefas propostas, os alunos percebem a importância da realização de testes de confirmação das conjecturas formuladas e este processo passa a ser uma preocupação constante. Apesar disso, na maioria das vezes os alunos realizam o teste através da experimentação de um único exemplo ou dos exemplos disponíveis no enunciado e, deste modo, nem sempre se apercebem de incorrecções ou limitações nas conjecturas formuladas. Há, no entanto, outras vezes que a verificação se baseia em representações gráficas e/ou em conceitos e propriedades matemáticas. Nestes casos, o teste das conjecturas acaba por coincidir com o processo da sua justificação.

A justificação de conjecturas também é um aspecto onde se observam algumas dificuldades. A dificuldade que os alunos têm em perceber a importância e o significado de estabelecer uma prova para as conjecturas que resistem a sucessivos testes, aliada à falta de hábito em procurar justificações ou mesmo a uma certa falta de conhecimentos, pode justificar a ausência deste processo nas suas explorações iniciais. Inicialmente, a justificação só está presente quando se baseia em propriedades matemáticas e/ou utiliza raciocínio dedutivo para formular conjecturas, apesar do uso deste processo não ser explícito nem intencional. À medida que os alunos vão adquirindo experiência na exploração de tarefas de investigação, alteram este comportamento e passam a reconhecer a importância e o significado da justificação de conjecturas como parte integrante da actividade de investigação. Nas últimas tarefas, a grande maioria já tem a clara noção de que deve pensar na justificação das suas conjecturas antes de dar por concluído o seu trabalho mas só o tenta fazer quando tal é explicitamente solicitado. Os alunos também mostram facilidade em compreender intuitivamente os argumentos matemáticos que suportam as suas soluções e que se apresentam, de forma geral, adequados, apesar do processo de justificação não incluir elementos de prova formal. De facto, esses argumentos são maioritariamente visuais e/ou apresentados de forma descritiva e em linguagem natural. Isto pode ter a ver com dificuldades com o formalismo já identificadas e só um trabalho continuado com ênfase nesse aspecto poderá alterar. Assim, ao longo da experiência de ensino e de forma gradual, os alunos tomam conhecimento dos vários processos matemáticos de que se podem servir para progredir na exploração das tarefas propostas.

Estratégias de resolução de problemas utilizadas e dificuldades manifestadas. Durante a experiência de ensino, os alunos envolvidos neste estudo revelam ser capazes de interpretar e compreender problemas e de definir e aplicar estratégias adequadas para a sua resolução. No entanto, o trabalho que desenvolvem ao longo das diferentes fases do processo de resolução apresenta características diferentes.

Na fase de compreensão, os alunos empenham-se, essencialmente, em dar sentido à informação disponível no enunciado do problema de modo a identificar o seu tipo. Os alunos têm tendência, possivelmente induzidos pela prática escolar anterior, para relacionar as características (textuais, gráficas ou simbólicas) de uma tarefa com determinado algoritmo e, deste modo, escolher a estratégia de resolução. Por isso, quando os dados não permitem uma clara identificação do tipo de problema por analogia com outros problemas semelhantes que já conhecem, mostram dificuldades na sua interpretação e, consequentemente, em iniciar a sua resolução. No entanto, algumas vezes, fazem essa identificação com base na relação que estabelecem entre os seus conhecimentos e o contexto do problema. Depois, de acordo com essa classificação, planeiam facilmente a sua resolução. Durante esta primeira fase do processo de resolução, não é visível a utilização de estratégias para facilitar a compreensão do problema e para permitir um eficiente planeamento da sua resolução.

Na fase seguinte de exploração e planificação do problema, a generalidade dos alunos mostra ter conhecimentos suficientes e algum potencial heurístico para seleccionar, de forma adequada a cada problema, as estratégias que podem conduzir à solução pretendida. As estratégias mais comuns são: a organização e redução de dados para os tornar manipuláveis, a simplificação do problema, a sua reformulação ou decomposição em subproblemas, a planificação hierárquica da solução, a manipulação algébrica e a representação gráfica de funções. As dificuldades surgem nas situações em que tentam seguir um raciocínio por analogia com outros problemas que já conhecem para a escolha das suas estratégias e não o fazem de forma adequada.

Na fase de execução, o trabalho desenvolvido pelos alunos é orientado para cumprir o plano proposto. Este trabalho consiste, essencialmente, na realização de cálculos, que registam com algum detalhe, e na implementação das várias estratégias definidas para obter uma solução para o problema. As estratégias identificadas nesta fase são variadas e incluem a realização de cálculos numéricos, a estimação de médias, o uso da regra de três simples, a manipulação algébrica, a utilização da representação gráfica e das potencialidades da máquina de calcular para representar graficamente funções e para encontrar a solução e, ainda, a execução de algoritmos de métodos numéricos conhecidos, alguns dos quais construídos pelos alunos. De um modo geral, revelam ter os conhecimentos matemáticos necessários a um bom desempenho na aplicação dessas estratégias, sejam elas de resolução numérica, gráfica ou algébrica.

Os alunos apresentam diferenças no seu comportamento relativamente à avaliação de estratégias. A maior parte começa por propor, na fase de planificação, uma estratégia de resolução única e, na maioria das vezes, antes de a executar, não imagina o desenvolvimento do processo de resolução para avaliar a viabilidade da estratégia proposta ou a sua eficiência. Assim, esta avaliação só ocorre no final da fase de execução quando os alunos não encontram (entre os seus recursos) as ferramentas necessárias para implementar a estratégia planeada ou quando verificam que esta não permite obter os resultados pretendidos, altura em que voltam atrás à fase de planificação, seleccionam nova estratégia e recomeçam nova fase de execução. Apesar disso, esta avaliação nem sempre contempla a eficiência das estratégias que fica, assim, comprometida. Há também situações em que este ciclo nem sempre é repetido até que seja identificado um caminho para a solução, pois os alunos desistem e deixam a resolução do problema incompleta porque não identificam uma nova estratégia que permita obter uma resposta de acordo com o esperado. No entanto, quando avaliam a viabilidade ou a eficiência da estratégia proposta inicialmente, ainda durante a fase de planificação, isso permite-lhes modificar o problema de forma a adaptá-lo às suas estratégias iniciais, quando identificam obstáculos à sua execução ou optar por planificar novas estratégias quando verificam que estas não são as mais eficientes.

O trabalho dos alunos não contempla, de modo geral, a última fase do processo de resolução de problemas – a verificação. De facto, quando dão por terminada a resolução do problema, depois de obterem uma solução, os alunos não mostram preocupação em verificar a correcção de cálculos e de resultados nem em dar uma resposta ao problema. Também não têm o cuidado de interpretar e explicar os resultados obtidos, dentro do seu contexto, nem procuram estratégias alternativas (modos de chegar ao mesmo resultado de outra maneira), pelo menos de forma intencional. Esta atitude parece estar relacionada com a importância que atribuem a esta fase, pois os alunos são capazes de realizar os processos descritos quando explicitamente solicitados.

Finalmente, os resultados indicam uma clara tendência dos alunos em desenvolver uma actividade linear composta por apenas três etapas com o objectivo de resolver rapidamente os problemas: compreensão do problema, desenvolvimento de um plano e execução do plano. Os alunos estão bastante condicionados por uma visão em que o seu papel consiste, principalmente, em dar respostas às tarefas propostas pela professora. Deste modo, a evolução de uma actividade marcada por estas três fases depende da continuidade do trabalho desenvolvido com os alunos: uma maior experiência na resolução de problemas leva-os a perceber a não linearidade deste processo e a importância da última fase, que é a que permite o ciclo.

Aprendizagens realizadas. Com a experiência de ensino que está na base deste estudo, pretendo desenvolver metodologias capazes de promover a aprendizagem dos alunos. Os resultados confirmam que se verificam aprendizagens significativas, ao nível do conhecimento dos conteúdos programáticos da disciplina. A exploração das tarefas de investigação, enquanto metodologia privilegiada de ensino e aprendizagem, permite abordar um grande número de temas programáticos da disciplina de Análise Numérica e, em particular, focar determinados conceitos. Estes conceitos são, frequentemente, construídos pelos alunos que desempenham assim, um papel activo no seu próprio processo de ensino-aprendizagem. Ao nível das tarefas, outro factor que revela favorecer a aprendizagem da Análise Numérica é a sequência de conteúdos programáticos nelas abordados, que permitem mobilizar e aprofundar os seus conhecimentos matemáticos mais recentes. Assim, nas últimas tarefas os alunos beneficiam do trabalho realizado e dos temas entretanto abordados, reforçando deste modo as suas aprendizagens.

No entanto, aprendizagem dos alunos não se esgota na aquisição de conhecimentos ligados aos temas programáticos abordados. A exploração das tarefas propostas revela-se uma experiência com potencialidades importantes também ao nível da aprendizagem da Matemática e do desenvolvimento de capacidades. De facto, a experiência realizada ao longo do semestre, sobretudo a exploração das tarefas, induz alterações no ambiente e hábitos de trabalho e nas experiências vividas pelos alunos que parecem ter facilitado as aprendizagens. O trabalho de grupo é reconhecido, inclusivamente pelos alunos, como muito significativo para a aprendizagem e como tendo favorecido o trabalho investigativo. Com a discussão entre os elementos do grupo surgem abordagens diversas que conduzem a melhorias na formulação de conjecturas e ao aumento do seu número e até à respectiva justificação. Além disso, esta discussão ajuda a estabelecer um ambiente em que os alunos aprendem a trabalhar cooperativamente e, desse modo, ganham confiança na sua capacidade de desenvolver um trabalho não rotineiro. As aulas de discussão em grande grupo revelam-se fundamentais também para a continuação da investigação e para aprofundar o conhecimento dos processos matemáticos nela envolvidos. A interacção com os colegas e o incentivo e desafios da professora favorecem a realização de novas descobertas e obriga os alunos a analisar as suas ideias e a justificá-las, quando questionados. Assim, os alunos desenvolvem, igualmente, a capacidade de comunicação oral e o espírito crítico. Apesar das dificuldades associadas ao registo escrito das suas descobertas, os relatórios produzidos pelos alunos, após a exploração de cada tarefa, revelam-se importantes para os ajudar a produzir textos escritos com alguma qualidade, desenvolvendo assim a capacidade comunicação escrita e a aprofundar a sua compreensão dos processos matemáticos envolvidos numa investigação.

Os novos hábitos de trabalho e de estudo experimentados são do agrado da generalidade dos alunos que consideram terem tido um papel importante na alteração de algumas das suas concepções e atitudes face à Matemática, influenciando a sua forma de trabalhar e facilitando a aprendizagem. Os alunos evoluem de uma visão centrada na utilização rotineira de procedimentos e passam a considerar diferentes abordagens aos problemas propostos e a reconhecer a possível existência de mais do que uma resposta 'certa'. A exploração das tarefas propostas permite-lhes, igualmente, perceber que a Matemática não é apenas conteúdos e que determinados processos e formas de pensar também a caracterizam. Confirma-se, desta forma, a potencialidade das tarefas de investigação para desenvolverem e facilitarem a aprendizagem dos alunos.

10.3. Reflexão final

Reflexão pessoal. Tendo este trabalho chegado à sua parte final, é necessário fazer um balanço e sintetizar um conjunto de ideias que emergem do estudo realizado no que diz respeito ao meu envolvimento enquanto professora e investigadora. Apesar das características deste estudo não permitirem a generalização dos resultados, considero poder afirmar que o trabalho realizado e a experiência vivida trazem mais valias a vários níveis.

As minhas primeiras reflexões centram-se nos alunos. A experiência de ensino e a minha investigação surgem, sobretudo, do meu empenho pessoal e profissional em melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática e, consequentemente, a educação dos alunos. Na verdade, são as atitudes negativas que os alunos universitários revelam perante as disciplinas de Matemática e as suas consideráveis dificuldades em processos matemáticos (como o raciocínio e a resolução de problemas não rotineiros) o que me move para a análise e reflexão de situações com que me deparo ao longo do meu percurso como professora no ensino superior e a consequente procura de soluções. Os alunos têm, naturalmente, gosto pela exploração e descoberta e, deste modo, um potencial favorável ao desenvolvimento de actividades de investigação. Contudo, é necessário que os professores realizem uma acção estruturada, sistemática e intencional para dar oportunidades aos alunos de transformarem esse potencial em modos de pensar e de agir, ou seja, desenvolverem uma atitude investigativa que lhes permita viver a pesquisa como um processo indispensável para a sua aprendizagem. A reacção favorável dos alunos às tarefas é disso prova concludente. Penso poder afirmar que as tarefas de carácter investigativo e de resolução de problemas propostas aos alunos, integradas no processo de ensino-aprendizagem da Análise Numérica, cumprem esse propósito. No final deste estudo, é particularmente gratificante a certeza de que, apesar das dúvidas e dificuldades sentidas, os alunos não só aprendem Análise Numérica como experienciam a actividade matemática e desenvolveram ideias sobre processos característicos desta ciência.

Importa também reflectir sobre os ganhos que em termos pessoais este estudo produz. Para mim, a sua realização constitui uma experiência muito significativa de aprendizagem, cujo resultado é difícil de condensar neste documento mas que certamente transforma as minhas práticas enquanto docente e investigadora. Um dos contributos mais relevantes deste estudo é o desenvolvimento da minha capacidade de questionar, agir e reflectir de uma forma mais organizada sobre a minha própria prática. De facto, no decorrer do estudo vou tomando consciência da importância de uma reflexão permanente e continuada sobre as práticas para a compreensão da realidade escolar, para o desenvolvimento do trabalho de professor e na identificação de modos de agir futuros. Esta reflexão sobre a minha prática contribui, igualmente, para um aprofundamento do meu conhecimento didáctico. Saliento a capacidade de procurar tarefas matemáticas de forma mais criteriosa, provavelmente associada à minha maior consciência sobre a existência de vários tipos de tarefas e respectivas potencialidades e sobre os cuidados a ter na sua formulação, de reflectir sobre a sua integração no processo de ensino-aprendizagem, de gerar e apoiar situações de interacção entre os alunos e de criar contextos de ensino e aprendizagem mais favoráveis ao desenvolvimento do seu raciocínio matemático. Altero, ainda, a minha perspectiva sobre o meu papel e o dos alunos no contexto de sala de aula. Neste âmbito, o estudo realizado contribui para uma mudança das minhas práticas, de uma perspectiva tradicional, marcada pela exposição e mecanização, no sentido de orientações mais metacognitivas e questionadoras. Naturalmente, ao longo do estudo, vivo alguns momentos de insegurança e de dúvida, marcados por uma grande sobrecarga de trabalho (desempenhando o papel de professora e investigadora em simultâneo) e pela necessidade de uma dedicação completa ao seu desenvolvimento. Ultrapassadas as dificuldades iniciais, sobressaem as certezas e reconheço na experiência vivida uma excelente oportunidade para crescer pessoal e profissionalmente.

Finalmente, é importante para mim terminar este estudo com a expectativa de deixar um acréscimo de conhecimentos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, no ensino superior. Este estudo proporciona um aprofundamento do conhecimento disponível sobre o ensino e a aprendizagem da Análise Numérica, nomeadamente no que se refere ao papel das tarefas de investigação no desenvolvimento do raciocínio matemático. Porém, ele está intimamente relacionado com várias características particulares onde se desenvolve (os alunos, o modo como os alunos vivem a experiência de ensino e a comentam, o ambiente que se cria, a professora e a experiência dos participantes) e, deste modo, não permite generalizações. No entanto, penso que é uma experiência que pode ser usada em contextos mais alargados, ajustando a sua planificação às especificidades dos alunos e das disciplinas e, eventualmente, procedendo a melhorias após cada aplicação. Assim, emerge deste estudo a possibilidade de argumentar a favor da introdução de tarefas de investigação no ensino da Matemática com base em evidência empírica. De facto, a análise dos resultados positivos desta experiência e a reflexão sobre as suas possíveis limitações, apontam para que os conteúdos programáticos da Análise Numérica possam ser abordados por um conjunto de tarefas de investigação, como parte integrante do processo de ensino-aprendizagem e para que seja possível despertar nos alunos o gosto por desenvolver um trabalho investigativo.

Recomendações e implicações. Como já referi, este estudo surge do meu interesse pelos processos de ensino e aprendizagem e na procura de uma aprendizagem mais significativa para os alunos, na construção do conhecimento. Penso que existe ainda muito trabalho por fazer neste domínio, tanto ao nível da prática lectiva como em termos da própria investigação.

Na verdade, na literatura existem estudos que conduzem a uma avaliação positiva das potencialidades das actividades de investigação no processo de ensino-aprendizagem dos alunos e da possibilidade da sua integração na sala de aula. Apesar disso, não são habituais os estudos que analisam experiências de ensino em que as tarefas de investigação são consideradas como metodologia privilegiada do processo de ensino-aprendizagem, sobretudo no ensino superior. Num momento de transição para a implementação generalizada do processo de Bolonha, o incremento do número de estudos que correspondam a uma diversidade de experiências desta natureza, neste nível de ensino, é importante para o avanço do conhecimento neste domínio e para proporcionar um quadro orientador da inovação das práticas pedagógicas.

Em relação às tarefas propostas durante uma experiência de ensino, elas devem ser variadas e suficientemente ricas para permitirem explorações e investigações que conduzam os alunos a desenvolver as suas capacidades de raciocínio e à compreensão de novos conceitos. Depois de criadas, é possível adaptá-las em função do tempo disponível para a sua realização, dos conceitos ou tópicos programáticos que se pretende abordar e dos processos matemáticos cuja utilização se pretende fomentar. As tarefas apresentadas neste trabalho são elaboradas por mim com o propósito de serem utilizadas numa disciplina (Análise Numérica) e com alunos específicos. Saliento, por isso, a necessidade de aplicá-las a outros alunos de forma a obter uma base de informação mais alargada para a sua avaliação. Igualmente interessante é a ideia de organizar um conjunto de tarefas disponíveis e avaliadas para poderem ser utilizadas e/ou adaptadas pelos docentes de forma a responder às suas solicitações.

A introdução de metodologias de ensino de carácter inovador deve ser acompanhada de processos de investigação que permitam analisar e avaliar os diferentes factores envolvidos. A experiência de ensino realizada, com a duração de um semestre na disciplina de Análise Numérica é pontual e limitada no tempo. Em futuras investigações, pode ser interessante analisar as possíveis contribuições das tarefas de investigação para a aprendizagem de outras disciplinas de Matemática. Há também que ter em conta que a exploração de quatro tarefas de investigação é necessariamente insuficiente para a adaptação à nova metodologia e para se poderem verificar ganhos consistentes no desempenho dos alunos no que diz respeito à capacidade de explorar tarefas de investigação, à geração de conhecimento e ao desenvolvimento do raciocínio matemático, sobretudo quando se parte de uma situação em que eles não têm ainda qualquer experiência com este tipo de actividades. Deste modo, uma investigação mais prolongada, em torno da mesma temática e com os mesmos alunos, pode ajudar a aprofundar o modo como a construção de conceitos e aquisição de conhecimentos de diversos tipos podem decorrer da experiência matemática dos alunos, a compreender até onde pode ir o valor deste tipo de propostas na persistência ou não das características da sua actividade de investigação identificadas no final da experiência de ensino e a analisar as consequências desta abordagem nas suas aprendizagens e desempenhos futuros. De facto, poucos trabalhos têm estudado sistematicamente os efeitos a longo prazo da realização de experiências de ensino com estas características.

Por último, e agora no que concerne aos professores, à semelhança do que acontece com os alunos, só aprendem e se desenvolvem profissionalmente quando se predispõem a fazê-lo e quando isso é pertinente e significativo para si. Deste modo, parece-me importante que estudos como este sejam realizados e divulgados junto dos docentes das disciplinas de Matemática, também ao nível do ensino superior, para que os professores interessados em proporcionar aos seus alunos este tipo de experiência possam enriquecer a sua formação e, desse modo, melhorar as suas práticas. Além disso, embora o estudo presente incida no ponto de vista dos alunos, parece-me igualmente relevante incentivar o desenvolvimento de outros estudos que foquem aspectos do trabalho do professor, uma vez que o seu papel também é muito diferente do que é desempenhado nas metodologias ditas tradicionais. Este aspecto é, aliás, aquele em que sinto que a possibilidade de um trabalho colaborativo entre colegas, apoiado na partilha de objectivos, experiências e responsabilidades pode ser uma excelente oportunidade para crescer profissionalmente e uma forma profícua de traçar caminhos e soluções e, deste modo, desenvolver um ensino coerente com o que se entende por saber Matemática.

Referências

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, *8*, 7-10 e 35.

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do projecto MAT_{789}*. Lisboa: APM.

Agre, G. P. (1982). The concept of problem. *Educational Studies in Mathematics*, *13*(2), 121-142.

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*(3), 183-198.

Ajose, S. A. (1999). Discussant's comments: On the role of visual representations in the learning of mathematics. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 81-96). Columbus, OH: ERIC.

Ali, R., Seth, D., Zainuddin, Z., Kassim, S., Sulaiman, H., & Kamaru, H. (2002). Learning and teaching mathematics with a graphic calculator. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society* (2nd Series), *25*, 53-82.

American Educational Research Association (2000). *The ethical standards of the American Educational Research Association*. Retirado de http://www.aera.net/AboutAERA/Default.aspx?menu_id=90&id=222 em 09.08.2008.

American Mathematical Association of Two-Year Colleges (2006). *Professional standards*. Retirado de www.missioncollege.org/depts/maths/hobbs/standars.html em 09/12/2009.

Antonini, S. (2006). Graduate students' processes in generating examples of mathematical objects. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 57-64). Prague, Czech Republic: PME.

Antonini, S., Furinghetti, F., Morselli, F., & Tosetto, E. (2007). University students generating examples in real analysis: Where is the definition? In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2241-2249). Cyprus: ERME.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht: Kluwer.

Artigue, M. (1999). The teaching and learning of mathematics at the university level. *Notices of the AMS, December, 1377*-1385.

Artigue, M. (2003).¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 2*, X, 117-134.

Artigue, M. (Dezembro, 2007). *Teaching and learning mathematics at university level*. Plenary lecture at the Academy of Europe Conference on The future of mathematics education in Europe. Lisbon University, Portugal.

Artzt, A. F., & Yaloz-Femia, S. (1999). Mathematical reasoning during small-group problem solving. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 115-126). Reston, VA: NCTM.

Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Associação de Professores de Matemática (1996). A natureza e organização das actividades de aprendizagem e o novo papel do professor. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 51-60). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Associação de Professores de Matemática (1998). *Matemática 2001: Recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

Azevedo, A. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções: Uma experiência com alunos do ensino secundário* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 147-176.

Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach: The psychology of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 2-8.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interactions: the case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. von Dormolen (Orgs.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N., & Kaput, J. J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 469-501). Dordrecht: Kluwer.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*, 23-40.

Bell, A. W. (1979). The learning of process aspects of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *10*, 361-385.

Berger, M. (1998). Graphic calculators: An interpretative framework. *For the Learning of Mathematics, 18*(2), 13-20.

Berger, T., & Pollatsek, H. (2002). Mathematics and mathematical sciences in 2010: What should students know? Retirado de http://www.maa.org/news/students2010.html em 3/11/08.

Bills, L., Mason, J., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification: the use of examples in teaching and learning mathematics. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 125-154). Prague, Czech Republic: PME.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.

Boavida, A. M. (1993). *Resolução de problemas em educação matemática: Contributos para uma Análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores* (Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: APM.

Boavida, A. M. (1994). Contributo para a compreensão das representações pessoais dos professores sobre a resolução de problemas. In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Orgs.), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 182-195). Lisboa: IIE.

Boero, P., Douek, N., & Ferrari, P. L. (2008). Developing mastery of natural language. In L. D. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 262-295). New York, NY: Routledge.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(2), 125-141.

Borasi, R. (1990). The invisible hand operating in mathematics instruction: Students' conceptions and expectations. In T. J. Cooney (Ed.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s* (pp. 174-181). Reston, VA: NCTM.

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Branca, N. (1980). Problem solving as goal, process and basic skill. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 3-8). Reston, VA: NCTM.

Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-24). Lisboa: SEM-SPCE.

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Smith-Reed, B., & Webb, D. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal, 34*(4), 663-689.

Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H., & Zimmermann, J. (1999). Cross-national comparison of representational competence. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 541-557.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8.º ano* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Bruner, J. S. (1966). *Towards a theory of instruction.* New York, NY: Norton.

Brunheira, L. (2000). *O conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de actividades de investigação na aula de matemática* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(1), 35-49.

Cai, J. (2000). Understanding and representing the arithmetic averaging algorithm: An analysis and comparison of US and Chinese students' responses. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, *31*(6), 839-855.

Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: An exploratory study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(5), 719-737.

Cai, J., Mamona-Downs J., & Weber, K. (2005). Mathematical problem solving: What we know and where we are going. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 317-320.

Cannell, C. F., & Kahn, R. L. (1968). Interviewing. In G. Lindzey & A. Aronson (Eds.), *The handbook of social psychology* (Vol. 2, pp. 117-136). New York, NY: Addison-Wesley.

Carl, I. M. (1989). Essencial Mathematics for the twenty-first century: The position of the National Council of Supervisors of Mathematics. *Mathematics Teacher*, *82*(6), 470-474.

Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics*, *58*, 45-75.

Charles, R. (1992). A mathematics problem solving course for elementary and middle school teachers. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies*. Berlin: Springer-Verlag.

Charles, R., & Lester, F. (1984). *Teaching problem solving*. London: Edward Arnold Pty.

Chazan, D. (1988). Proof and measurement: An unexpected misconception. In A. Borbás (Ed.), *Proceedings of the 12th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 207-214). Veszprém, Hungary: PME.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 359-387.

Christiansen, B., & Walter, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Orgs.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Cifarelli, V. (Abril, 1993). *Representation processes in mathematical problem solving*. Artigo apresentado na Annual Meeting of American Educational Research Association, Atlanta, GA.

Cifarelli, V. (1998). The development of mental representations as a problem solving activity. *Journal of Mathematical Behavior, 17(2)*, 238-264.

Cifarelli, V., & Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open-ended problem-solving situations. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 302-324.

Clement (2004). A model for understanding, using and connecting representations. *Teaching Children Mathematics, 11*(2), 97-102.

Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The construtivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2), 83-94.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, *20*(1), 41-53.

Cohen, L., & Manion, L. (1994). *Research methods in education*. London: Routledge.

Core-Plus Mathematics Project (2004). *Features of the CPMP curriculum*. Retirado de http://www.wmich.edu/cpmp/features.html em 09/12/2009.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Costa, A. F. (1986). A pesquisa de terreno em sociologia. In A. S. Silva & J. M. Pinto (Eds.), *Metodologia das ciências sociais* (pp. 129-148). Porto: Afrontamento.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingerdorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction, 9*(4)*,* 343-363.

Cruz, J. G., & Martinón, A. (1998). Interacción y construcción significativa del conocimento: notas teóricas y una prática educativa. *Revista de Didacticas de las Matemáticas, 16*, 85-100.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1985). A experiência matemática. Rio de Janeiro: F. Alves.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986).The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, *5*, 281-303.

Delors, J. (1996). Learning: The treasure within. Retirado de http://www.unesco.org/delors/delors_e.pdf em 3/11/08.

Delos Santos (2006). *An investigation of students' understanding and representation of derivative in a graphic calculator mediated teaching and learning environment* (Tese de doutoramento, Universidade de Auckland). Retirado de http://researchspace.auckland.ac.nz em 16/12/2009.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-17). Thousand Oaks: Sage Publications.

Dias, P. (2005). *Avaliação reguladora no Ensino Secundário. Processos usados pelos alunos em investigações matemáticas*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Doerr, H. M., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 143-163.

Doerr, H. (2006). Examining the tasks of teaching when using student's mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 3-24.

Domingos, A. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações* (Tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: APM.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados: A Matemática no ínicio do superior* (Tese de doutoramento, Universidade Nova de Lisboa).

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalsi, M. (1994). The teaching of linear algebra in first year of french science university: Epistemological difficulties, use of 'meta level', long term organization. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 137-144). Lisboa, Portugal: PME.

Douek, N. (1999). Argumentative aspects of proving: Analysis of some undergraduate mathematics student's performances. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 273-280). Haifa, Israel: PME.

Douek, N., & Scali, E. (2000). About argumentation and conceptualization. In T. Nakahara & M. Koyama (Ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 249-256). Hiroshima, Japão: PME.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Drijvers, P., & Doorman, M. (1996). The graphics calculator in mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 425-440.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (2003). *Ed Dubinsky's Home Page*. Retirado de http://www.math.kent.edu/~edd/ em 12/04/07.

Dubinsky, E., & Tall, D. (1991). Advanced mathematical thinking and the computer. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 231-243). Dordrecht: Kluwer.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Dumas-Carré, A., Caillot, M., Torregrossa, J. M., & Gil, D. (1989). Deux approaches pour modifier les activités de résolution de problèmes en physique dans l'enseigment secondaire: Une tentative de syntheses. *Aster*, *8*, 135-160.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-26). Columbus, OH: ERIC.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2.ª ed.). Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 140-152). Dordrecht: Kluwer

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-37). Washington, DC: MAA.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous A., & Gagatsis, A. (2007), Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 533-556.

English, L. D. (1999). Reasoning by analogy: A fundamental process in children's mathematical learning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 22-36). Reston, VA: NCTM.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: MacMillan.

Ernest, P. (1992). Problem solving: Its assimilation to the teacher's perspectives. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies* (pp. 287-300). Berlin: Springer-Verlag.

Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 25-48). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Dordrecht: Kluwer.

Evans, J. (1987). Investigations – the state of the art. *Mathematics in School*, *16*(1), 27-30.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions*. Journal of Mathematical Behavior, 17(1)*, 105-121.

Fernandes, D. (1989). Aspectos metacognitivos na resolução de problemas em Matemática. *Educação e Matemática*, *8,* 3-6.

Fernandes, D. (1992a). Examining effects of heuristic processes on problem solving education of preservice mathematics teachers. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies* (pp. 313-328). Berlin: Springer-Verlag.

Fernandes, D. (1992b). Resolução de problemas: Investigação, ensino, avaliação e formação de professores. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos & J. P. Ponte (Eds.), *Educação matemática: Temas de investigação* (pp.45-103). Lisboa: IIE.

Ferrari, P. L. (2004). Mathematical language and advanced mathematics learning. In S. A. Liederman, W. C. Wolf & P. York (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 383-390). Bergen, Norway: PME.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, *3*(2), 9-18.

Flores, C., & Moretti, M. (2005). *O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: Ponto de análise para aprendizagem Matemática*. Retirado de http://www.anped.org.br/28/textos/gt19/gt19736int.pdf. em 4/12/2009.

Flores, C., & Moretti, M. (2006). As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. *Revista Electrónica de Educação Matemática, 5*, 5-13. Retirado de www.redemat.mtm.ufsc.br/revemat/2006_pdf/revista_2005_01_completo.pdf em 4/12/2009.

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An auto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *27*, 2-7.

Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem-solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 361-372.

Frank, M. (1988). Problem solving and mathematics beliefs. *Arithmetic teacher*, *35*, 32-34.

Freitas L., & Freitas, C. (2002). *Aprendizagem cooperativa: Teoria/Prática* (1ª ed.). Porto: ASA.

Frota, M. C. R. (2004). Estratégias gráficas na aprendizagem de cálculo. In *Anais do VIII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 7-20). Recife: SBEM.

Furinghetti, F., & Paola, D. (1997). Shadows on proof. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 273-280). Lahti, Filand: PME.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657.

Gigger, D. L., & Walter, C. N. (2006). One problem, two contexts. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, pp. 80-81). Mérida, México: Uiversidad Pedagógica Nacional.

Girard N. (2001). Promoting multiple representations in calculus: Examining students' use of the graphing calculator. In G. Goodell (Ed.), *Proceedings of the 14th Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* [versão electronica]. Retirado de http://archives.math.utk.edu/ICTCM/i/14/C014.html em 9/12/2009.

Goetz, J., & LeCompte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. San Diego, CA: Academic Press.

Goldenberg, E. P. (1998). "Hábitos de pensamento": Um princípio organizador para o currículo (I). *Educação e Matemática*, *47*, 31-44.

Goldenberg, E. P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações mate-*

máticas na aula e no currículo (pp. 35-49). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Goldin, G., A (1987). Cognitive representational systems for mathematical problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 125-145). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp.197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp.176-201). New York, NY: Routledge.

Goldin, G. A., & Kaput J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representations in learning and doing mathematics. In S. P., Leslie & N. Pearla (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-432). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A.A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston, VA: NCTM.

Gonçalves, S. & Kalish, A. (2008). Método Expositivo. *OPDES, 1*. Retirado de http://ndsim.esec.pt/pagina/opdes/brochuras/01.pdf em 3/11/08.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83- 101). Lisboa: APM.

Gray, E., M., & Pinto, M. (1995). Difficulties in teaching analysis to no-specialists. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 18-25). Recife, Brasil: PME.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *38*, 1-3, 111-133.Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 115-141.

Gray, E., & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic precepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 65-72). Ultrecht, Netherlands: PME.

Greenes, C., & Findell, C. (1999). Developing students' algebraic reasoning abilities. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 127-137). Reston, VA: NCTM.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan, 78*(5), 361-367.

Guimarães, H. M. (2003). Algumas dicotomias no ensino da Matemática. In M. I. Miguéns (Ed.), *O ensino da Matemática, situação e perspectivas* (pp. 89-100). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

Hadamard, J. (1945). *Psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, *9*, 20-23.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*, 6-13.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht: Kluwer.

Harel, G., Selden, A., & Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future (*pp. 147-172). Rotterdam: Sense Publishers.

Henriques, A. C. (2006). *Actividades investigativas na aprendizagem da Análise Numérica: Uma experiência no ensino superior* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Henriques, A. C., & Ponte, J. P. (2008). Actividades de investigação na aprendizagem de Análise Numérica. *Revista de Educação, 2*, XVI, 5-32.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* (pp. 65-97). Reston, VA: NCTM.

Hitt, F. (1998a). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

Hitt, F. (1998b). Representations and mathematics visualization. In S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, W. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood & L. Stiff (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 94-99). Columbus, OH: ERIC.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(2), 145-165.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: a constructivist enquiry*. London: Falmer Press.

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-25). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 265-261.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, *8*, 163-180.

Kantowski, M. G. (1978). The teaching experiment and Soviet studies of problem solving. In L. L. Hatfield (Ed.), *Mathematical problem solving* (pp. 43-52). Columbus, OH: ERIC.

Kantowski, M. G. (1980). Some thoughts on teaching for problem solving. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 195-203). Reston, VA: NCTM.

Kastberg, S., & Leatham, K. (2005). Research on graphing calculators at the secondary level: Implications for mathematics teacher education. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 5*(1), 25-37.

Kertil, & Aydin (2009). Investigating representational fluency in modelling process: The experience of pre-service teachers with a cassette problem. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305-312). Thessaloniki, Greece: PME.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. New York, NY: Oxford University Press.

Knuth, E. J. (2000). Student understanding of connections between equations and graphs. *Mathematics Teacher, 93*(1), 48-53.

Kraemer, J. M. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: Cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds). *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 3-33). Lisboa: Escolar Editora.

Laborde, C. (1994). Working in small groups: A learning situation? In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straber & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 147-158). Dordrecht: Kluwer.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lavy, I. (2006). A case study of different types of arguments emerging from explorations in an interactive computerized environment. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 153–169.

Leal, L. C. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987a) Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987b) Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lester. F. K. (1980). Research on mathematical problem Solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Educations* (pp. 286-323). Reston, VA: NCTM.

Lester, F. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem solving instruction. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning problem solving: Multiple research perspectives* (pp.41-69). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lithner, J. (2000a). Mathematical reasoning and familiar procedures. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*, 83-95.

Lithner, J. (2000b). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics*, *41*,165-190.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 29–55.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 255–276.

Ludke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

MAA (2003). Guidelines for programs and departments in undergraduate mathematical sciences. Retirado de http://www.maa.org/guidelines/guidelines.html em 3/11/08.

MAA (2004). Undergraduate Programs and Courses in the Mathematical Sciences: CUPM Curriculum Guide 2004. Retirado de http://www.maa.org/cupm/cupm2004.pdf em 3/11/08.

Maher, C. A. (2002). How students structure their own investigations and educate us: What we we've learned from a 14-year study. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 305-312). Norwich, United Kingdom: PME.

Maher, C. A. (2005). How students structure their investigations and learn mathematics: Insights from a long-term study. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 1–14.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 385-401.

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 180-195). Lahti, Filândia: PME.

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). The role of the figure in students' concepts of geometric proof. In G. Booker, P. Cobb & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 266-273). Paris, France: PME.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Bristol: Addison-Wesley.

Matos, J. F. (1991). *Logo na Educação Matemática: Um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Matos, J. F., & Carreira, S. (1994). Estudos de caso em educação matemática: Problemas actuais. *Quadrante*, *3*(1), 19-53.

Mayer, R. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning problem solving: Multiple research perspectives* (pp.123-138). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Menino, H. (2004). *O relatório escrito, o teste em duas fases e o portefólio como instrumentos de avaliação das aprendizagens em Matemática: Um estudo no 2.º ciclo do ensino básico* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. São Francisco, CA: Jossey-Bass.

Morgan, C. (1997). The institutionalization of open-ended investigation: Some lessons from the UK experience. In E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom* (pp. 49-62). Helsinki: University of Helsinki.

Morselli, F.(2006). Use of examples in conjecturing and proving: an exploratory study. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 185-192). Prague, Czech Republic: PME.

Nardi, E. (1996). Tensions in the novice mathematician's induction to mathematical abstraction. In L. Puiq & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 51-58). Valencia, Spain: PME.

National Council of Supervisors of Mathematics (2006). Standards for (Postsecondary) Success. Retirado de http://mathforum.org/kb/thread.jspa?forumID=204&threadID=1331600&messageID=4274964#4274964 em 18/09/08.

National Council of Teachers of Mathematics (1985). *Uma agenda para acção*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa da edição original de 1980).

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e avaliação da Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE. (Tradução portuguesa da edição original de 1989).

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE. (Tradução portuguesa da edição original de 1991).

National Council of Teachers of Mathematics (1999). *Normas para a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa da edição original de 1995).

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Navas, J. M. B. (2008). Es posible una evaluación democrática? O sobre la necesidad de evaluar educativamente. In M. Ballester et al. (Eds.), *Evaluación como ayuda al aprendizaje* (pp. 45-56). Barcelona: Graó.

Neria, D., & Amit, M. (2004). Students preference of non-algebraic representations in mathematical communication. In S. A. Liederman, W. C. Wolf & P. York (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 409-416). Bergen, Norway: PME.

Niemi, D. (1996). Assessing conceptual understanding in mathematics: Representations, problem solutions, justifications, and explanations. *The Journal of Educational Research, 89*(6), 351-363.

Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. In A Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 11- 47). Dordrecht: Kluwer.

Nunokawa, K. (2005). Mathematical problem solving and learning mathematics: what we expect students to obtain. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 325-340.

Oliveira, H., Segurado, I., & Ponte, J. P. (1998). Explorar, investigar e discutir na aula de matemática. In A. Roque & M. J. Lagarto (Eds.). *Actas do ProfMat 98* (pp. 207-213). Lisboa: APM.

Oliveira, H., Ponte, J. P., Santos, L., & Brunheira, L. (1999). Os professores e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 97-110). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Ongstad, S. (2006). Mathematics and mathematics education as triadic communication? A semiotic framework exemplified. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 247-277.

Ozgun-Koca, S, A. (1998). Student's use of representations in mathematics education. In S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, W. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood & L. Stiff (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 812). Columbus, OH: ERIC.

Pecorino, P. A., Kincaid, S., & Gironda, B. (2008). Research and experimentation in teaching effectiveness: The ethical review process and the IRB. *International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning, 1*(2). Retirado de http://www.georgiasouthern.edu/ijsotl em 23/08/2010.

Pehkonen, E. (1991). Developments in the undersatanding of problem solving. *ZDM*, *2*, 46-50.

Penglase, M., & Arnold, S. (1996). The graphics calculator in mathematics education: A critical review of recent research. *Mathematics Education Research Journal, 18*(1), 58-90.

Piaget, J. (1977). *O desenvolvimento do pensamento: Equilibração das estruturas cognitivas*. Lisboa: Dom Quixote.

Piez, C., M., & Voxman, M., H. (1997). Multiple representations: Using different perspectives to form a clearer picture. *Mathematics Teacher*, *90*(2), 164-167.

Pinto, M. (1998). *Students understanding of real analysis* (Tese de doutoramento, University of Warwick, UK).

Pinto, M., & Tall, D. (1996). Students teachers' conceptions of rational numbers. In L. Puiq & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 139-146). Valencia, Spain: PME.

Pinto, M., & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theories: Giving and extracting meaning. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 281-288). Haifa, Israel: PME.

Pirie, S. (1987). *Investigations in your classrooms.* Basingstoke:MacMillan.

Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 7-14). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning* (2 vols.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Pólya, G. (1980). On solving mathematical problems in high school. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 1-2). Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery*: *On understanding, learning and teaching problem solving* (combined ed.). New York, NY: Wiley.

Pólya, G. (2002). The goals of mathematical education. *Mathematics Teaching*, *181*, 42-44.

Ponte, J. P. (1991). Resolução de problemas: da Matemática às aplicações. In I. Martins, A. I. Andrade, A. Moreira, M. H. Araújo e Sá, N. Costa & A. Paredes (Eds.), *Actas do 2.º Encontro Nacional de Didácticas e Metodologias de Ensino* (pp. 287-296). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Ponte, J. P. (1992). Problemas de Matemática e situações da vida real. *Revista de Educação*, *2*, 95-108.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e* investigar *sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, *2*, 93-169.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, *39*, 419-430.

Ponte, J. P. (2008). Aprender Matemática: Memorizar e mecanizar versus compreender e resolver problemas. In P. Canavarro (Ed.), *20 anos de temas na EeM* (pp. 2-13). Lisboa: APM.

Ponte J. P., Brocardo J., & Oliveira H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interacções sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 119-138). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: DES-ME.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, M. H., & Segurado, M. I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (1998). Investigating mathematical investigations. In P. Abrantes, J. Porfirio & M. Baía (Eds.), *Les interactions dans la classe de mathématiques: Proceedings of the CIEAEM 49* (pp. 3-14). Setúbal: Escola Superior de Educação de Setúbal.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Porfírio, J. (1993). *A resolução de problemas na aula de matemática: uma experiência no 7º ano de escolaridade* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Porfírio, J., & Oliveira, H. (1999). Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 111-117). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Porteous, K. (1990). What do children really believe? *Educational Studies in Mathematics*, *21*(6), 589-598.

Presmeg, N. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of mathematics*, *6*(3), 42–46.

Presmeg, N., & Nenduradu, R. (2005). An investigation of a preservice teachers' use of representations in solving algebraic problems involving exponential relationships. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 105-112). Melbourne, Austrália: PME.

Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 319–325.

Robert, A., & Schwarzenberger, R. (1991). Research into teaching and learning. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 127-139). Dordrecht: Kluwer.

Robova, J. (2002). Graphing calculator as a tool for enhancing the efficacy of mathematics teaching. In M. Boezi (Ed.), *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics.* Crete, Greece. Retirado de www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/ICTM2 em 16/12/2009.

Rocha, A. (2003). *Uma experiência com actividades de investigação na aula de Matemática: Competências matemáticas, atitudes e concepções de dois alunos do 7º ano de escolaridade* (Tese de mestrado, Universidade do Porto).

Romberg, T. A. (1994). Classroom instruction that fosters mathematical thinking and problem solving: Connections between theory and practice. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-70). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Ruthven, K. (1990). The inlluence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics, 21*(5),431-450.

Ruthven, K. (1996). Calculators in the mathematics curriculum: The scope of personal computational technology. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 435-468). Dordrecht: Kluwer.

Ruthven, K., (1997). Calculator use by upper-primary pupils tackling a realistic number problem. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the Inter-*

national Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 96-103). Lahti, Finlândia: PME.

Santos, F. C. (2002). *Fundamentos de Análise Numérica*. Lisboa: Sílabo.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: Porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Coords.), *Avaliação das aprendizagens: Das concepções às práticas* (pp. 77-84). Lisboa: ME, DEB.

Santos, L. (2005). A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Orgs.), *Educação matemática: caminhos e encruzilhadas* (pp. 169-187). Lisboa: APM.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M., & Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2.º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 83-106). Lisboa: SEM-SPCE.

Schoenfeld, A. H. (1980). Heuristics in the Classroom. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 9-22). Reston, VA: NCTM.

Schoenfeld, A. H. (1985a). *Mathematical problem solving*. London: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1985b). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. In E. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (*pp. 361-379). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In, A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for research in mathematics education, 20*(4), 338-355.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, NY: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (1994). *Mathematical thinking and problem solving.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schroeder, T. L., & Lester, F. K. (1990). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. R. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 154-172). Reston, VA: NCTM.

Schultz, J., & Waters, M. (2000). Why representations? *Mathematics Teacher*, *93*(6), 448-453.

Segurado, M. I. (1997). *A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2.º ciclo* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Semião, M. J. (2007). *A utilização da calculadora gráfica na aula de Matemática: Um estudo com alunos do 12.º ano no âmbito das funções* (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

SERA (2005). *Scottish education research association ethical guidelines for educational research.* Retirado de www.sera.ac.uk/docs/00current/SERA%20Ethical%20GuidelinesWeb.PDF em 23/08/2010.

Serrazina, L., Vale, I., Fonseca, H., & Pimentel, T. (2002). Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. In J. P. Ponte, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 41-58). Lisboa: SPCE.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: On processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (1997). Framing in mathematichal discourse contexts. E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 144-151). Lahti, Finlândia: PME.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse that meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*, 13-57.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191–228.

Shulman, L. S. (1986a). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 3-36). New York, NY: MacMillan.

Shulman, L. (1986b). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*, 4-14.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. Londres: Falmer Press.

Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J., & Abrantes, P. (1999). O currículo de Matemática e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-85). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Silver, E. A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: some underrepresented themes and needed directions. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 247-266). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Silver, E. A. (1993). On mathematical problem posing. In I. Hirabayashi (Ed.), *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 66-85). Tsukuba, Japan: PME.

Silver, E. (1996). Acerca da formulação de problemas de matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 139-162). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Simpson A. (1994). Student attitudes to proof. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 26-30). Lisboa, Portugal: PME.

Slavit, D. (1996). Graphing calculators in a "hybrid" algebra II classroom. *For the Learning of Mathematics, 16*, 9-14.

Small, D. (2008). An urgent call to improve traditional college algebra programs. Retirado de http://www.maa.org/t_and_l/urgent_call.html em 3/11/08.

Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*. 3-4, 341-350.

Stake, R. E. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.). *The teaching and assessing of Mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM e Erlbaum.

Stylianou, D. A., & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Journal of Mathematical Thinking and Learning, 6* (4). 353-387.

Tall, D. (1979). Cognitive aspects of proof, with special reference to the irrationality of $\sqrt{2}$. In D. Tall (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 203-205). Warwick, United Kingdom: PME.

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching*, *127*, 28-32.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495- 511). New York, NY: MacMillan.

Tall, D. (1995). Cognitive growth en elementary and advanced mathematical thinking. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 61-75). Recife, Brasil: PME.

Tall, D. (1997). From school to university: The effects of learning styles in the transition from elementary to advanced mathematical thinking. In Thomas, M. O. J. (Ed.), *Proceedings of The 7th Annual Australasian Bridging Network Mathematics Conference* (pp. 9-26). University of Auckland, New Zealand.

Tall, D. (1999). The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in school mathematics education around the world* (Vol, 4, pp. 117-136). Reston, VA: NCTM.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., De Marois, P., McGowan, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M., & Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *1*, 81-104.

Thompson, A. (1985). Teacher's conceptions of mathematics and the teaching of problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (*pp. 281-294). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.127-146). New York, NY: MacMillan.

Tom, L., & Russell, K. (2001). Relationship between visual and nonvisual solution methods and difficulty in elementary mathematics. *The Journal of Educational Research, 94*(4), 248-255.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438-445.

Tuckman, B. W. (2002). *Manual de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Upton, D. S. (2006). Students' solution strategies to differential equations problems in mathematical and non-mathematical contexts. In Alatorre, S., Cortina, J. L. Sáiz, M. & Méndez, A. (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, 346). Mérida, México: Uiversidad Pedagógica Nacional.

Vale, I. (1993). *Concepções e práticas de jovens professores perante a resolução de problemas de Matemática: Um estudo longitudinal de dois casos* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Valério, N. M. R. (2004). *Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1.º ciclo*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Van Dormolen, J. V. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics*, *8*(1), 27-34.

Varandas, J. (2000). *Avaliação de investigações matemáticas: Uma experiência* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Varandas, J. (2003). Avaliação da actividade investigativa: Uso de uma tabela de descritores. *Educação e Matemática*, *74*, 74-78.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 167-181.

Viana, O. A. (2007). As representações pictóricas de alunos do ensino médio na resolução de problemas de geometria: uma análise qualitativa. In *Actas do IX Encontro Nacional de Educação Matemática: Diálogos entre a Pesquisa e a Prática educativa*. Belo Horizonte. Retirado de www.sbem.com.br/files/ix_enem/.../CC00596629800T.doc em 30/11/2009.

Vinner, S. (1976). The naïve concept of definition in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *7*, 413-429.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Kluwer: Dordrecht.

Vinner, S., & Hershkowitz R. (1980). Concept images and some common cognitive paths in the development of simple geometric concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the 4th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1, pp. 177-184). Berkeley, USA: PME.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Wæge, K. (2008). *Relations between students' motivation for learning mathematics and a mathematical teaching approach.* Retirado de www.dpu.dk/Everest/Publications/Medarbejdere/mmi/norma/reg%20papaer/20080213153541/CurrentVersion/Waege(A).doc em 20/08/2010.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 101–119.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics classrooms: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 115–133.

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving and learning: the relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 351-360.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, *56*, 209–234.

Wilson, M. R., & Krapfl, C. M. (1994). The impact of graphics calculators on students' understanding of function. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 13*, 252-265.

Wink, D. (1999). Is teaching instinctive? No, I'm afraid not. *Journal of College Science Teaching*, *28*(5), 315-317.

Yeo, J. B. (2007). *Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment* (Technical Report ME2007-01). Retirado de http://math.nie.edu.sg/bwjyeo/publication/MMETechnicalReport2007_MathematicalTasks_ME200701.pdf em 24/01/2008.

Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2002). Flux in school algebra: Curricular change, graphing technology, and research on student learning and teacher knowledge. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 725–755). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Yin, R. (2003). *Case study research: Design and methods* (3ª ed.). London: Sage.

Yousof, Y. B. M., & Tall, D. (1994). Changing attitudes to mathematics through problem solving. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 401-408). Lisboa, Portugal: PME.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student-teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 67-78.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: The perspective of constructs. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 1169-1207). Charlotte, NC: Information Age.

Zhang, J. J. (1997). The nature of external representations in problem solving. *Cognitive Science, 21*(2), 179-217.

Anexos

Anexo 1 - Questionário inicial

Pretendo, com este questionário, obter indicações úteis para a professora/investigadora de forma a poder intervir, de forma consciente, no sentido de melhorar os resultados obtidos pelos seus alunos. Responda às questões colocadas de forma tão completa quanto possível e apresente todos os cálculos e raciocínios que efectuar.

PARTE I

Para cada uma das seguintes afirmações exprima o seu nível de acordo, assinalando o nível que lhe parece adequado

1 – Discordo totalmente
2 – Discordo parcialmente
3 – Não discordo nem concordo
4 – Concordo parcialmente
5 – Concordo totalmente

		1	2	3	4	5
1	A Matemática é uma colecção de factos e procedimentos que têm que ser memorizados.					
2	A Matemática é, sobretudo, resolução de problemas.					
3	Na Matemática o mais importante é a obtenção de respostas correctas.					
4	A Matemática na universidade é muito abstracta.					
5	Quando resolvo problemas, tento diferentes abordagens quando uma tentativa falha.					
6	Sou capaz de relacionar novos temas com as experiências pessoais ou conhecimentos anteriormente adquiridos.					
7	Agrada-me participar em debates ou discussões abertas.					

PARTE II

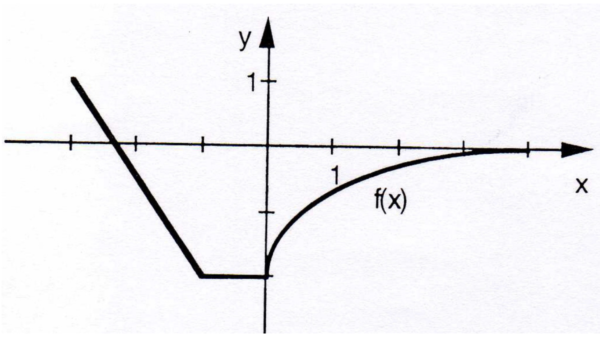
Questão 1[3]: Determine a derivada da função $f(x) = \frac{1+x^2}{x^2}$

Questão 2[1]: Prove a seguinte afir mação “Se a e b são positivos e $a > b$, então $a^2 > b^2$“.

Questão 3[1]: Determine os valores de x que verificam a desigualdade $\frac{1}{x-2} > 3$

Questão 4[2]: Uma companhia produz x unidades de um produto por ano, onde $x \in [400, 600]$. O custo de produção estimado é aproximadamente $-2x^2 + 2000x - 420000$ u.m./ano e o peço de venda esperado é aproximadamente $-x^2+700x$ u.m./ano. Quantas unidades devem ser produzidas cada ano para maximizar o lucro anual?

Questão 5[2]: Considere a função f(x), dada na figura seguinte. Desenhe o gráfico da função derivada f’(x).



Questão 6[3]: Encontre tantos padrões, quanto possível, para as potências de 3.

NOME:____ **Nº ALUNO:**______

☐ Sim, sou voluntário para participar nas entrevistas do estudo (marcar um X)

[3] Adaptado de Pinto (1998)
[2] Adaptado Lithner (2000b)
[3] Adaptado de Yeo (2007)

Anexo 2 – Questionário final

Pretendo, com este questionário, conhecer a opinião dos alunos sobre a nova metodologia de ensino-aprendizagem utilizada (em particular sobre a realização de tarefas de investigação). Para cada uma das seguintes afirmações exprima o seu nível de acordo, assinalando o nível que lhe parece adequado:

1 – Discordo totalmente; **2** – Discordo parcialmente; **3** – Não discordo nem concordo;
4 – Concordo parcialmente; e **5** – Concordo totalmente

Este questionário é anónimo e não terá qualquer influência na sua classificação. Responda, por favor, com a máxima sinceridade.

Parte I

		1	2	3	4	5
1	A Matemática é uma colecção de factos e procedimentos que têm que ser memorizados.					
2	A Matemática é, sobretudo, resolução de problemas.					
3	Na Matemática o mais importante é a obtenção de respostas correctas.					
4	A Matemática na universidade é muito abstracta.					
5	Quando resolvo problemas, tento diferentes abordagens quando uma tentativa falha.					
6	Sou capaz de relacionar novos temas com as experiências pessoais ou conhecimentos anteriormente adquiridos.					
7	Agrada-me participar em debates ou discussões abertas.					
8	As indicações dadas pela professora foram suficientes para a realização das tarefas					
9	O tempo disponibilizado para a realização das tarefas foi suficiente					
10	Os assuntos tratados nas tarefas são motivadores					
11	A realização de cada tarefa ajudava-me nas tarefas seguintes					
12	A realização das tarefas ajudou-me a compreender melhor os conteúdos programáticos da disciplina					
13	Houve uma adequada ponderação entre aulas expositivas, de exercícios e de realização de tarefas					
14	Na apresentação oral consigo explicar melhor o que fiz					
15	As indicações dadas pela professora foram suficientes para a realização do relatório de grupo					
16	Os comentários que a professora fez no relatório ajudaram-me a perceber os pontos fortes e fracos do meu trabalho					
17	Os relatórios realizados em grupo permitem à professora avaliar o meu trabalho nestas tarefas					
18	A forma de avaliação das tarefas de investigação foi adequada					
19	O trabalho desenvolvido com esta nova metodologia foi eficaz em termos da minha aprendizagem					
20	Agrada-me a metodologia de ensino utilizada nesta disciplina					

Parte II

O que pensa da realização de tarefas de investigação na aula de Matemática?

____
____
____
____
____

Faça um breve comentário sobre o que lhe agradou mais e o que lhe agradou menos ao longo das aulas em que se realizaram tarefas de investigação?

____
____
____
____
____

No que respeita às tarefas de investigação, haveria alterações que gostasse de sugerir?

____
____
____
____

Relativamente à disciplina de Análise Numérica, no seu todo, há algo mais que gostaria de acrescentar?

____
____
____
____
____

Anexo 3 – Programa da disciplina de Análise Numérica

1. Números e Erros
- 1.1 Introdução.
- 1.2 Representação de números reais. Conversão de Bases.
- 1.3 Definições fundamentais de erro.
- 1.4 Algarismos significativos.
- 1.5 Erros de arredondamento e de truncatura.
- 1.6 Propagação de erros.
- 1.7 Aritmética Intervalar.

2. Equações Não Lineares
- 2.1 Introdução.
- 2.2 Resolução numérica de equações não lineares.
- 2.3 Determinação do valor aproximado de uma raiz
  - 2.3.1 Método da bissecção.
  - 2.3.2 Método da falsa posição.
  - 2.3.3 Método de Newton.

3. Interpolação
- 3.1. Introdução.
- 3.2. Interpolação Polinomial.
  - 3.2.1 Polinómio interpolador de Lagrange.
  - 3.2.2 Polinómio interpolador de Newton com diferenças divididas.
  - 3.2.3 Polinómio interpolador de Newton com diferenças progressivas.
- 3.3. Erros de Interpolação.
- 3.4. Splines.

4. Ajuste de Curvas
- 4.1. Introdução.
- 4.2. Método dos mínimos quadrados
  - 4.2.1. Regressão Linear
  - 4.2.2. Regressão polinomial
- 4.3. Linearização.

5. Integração Numérica
- 5.1. Introdução.
- 5.2. Fórmulas de Newton-Côtes
  - 5.2.1 Regra dos trapézios simples e composta.
  - 5.2.2 Regras de Simpson simples e composta.
- 5.3 Erros de integração.

6. Equações Diferenciais
- 6.1 Introdução.
- 6.2 Método de Euler.
- 6.3 Método de Heun.
- 6.4 Métodos de Runge-Kutta.
- 6.5 Método de Adams-Bashforth.
- 6.6 Método de Adams-Moulton.

Anexo 4 – Planeamento das actividades lectivas da disciplina de Análise Numérica
1.º Semestre 2008/2009

Semana	N.º aulas (50')	Actividade	Tópico programático
15-19 Set	2	Aula apresentação; Questionário inicial; Introdução à AN;	
	2	Aula expositiva e de resolução de exercícios e problemas	Números e Erros
22-26 Set	3	Tarefa 1 – Exploração	Aritmética Intervalar
	1	Aula de resolução de exercícios e problemas	Números e Erros
29-03 Out	2	Tarefa 1 – Discussão	Aritmética Intervalar
	1	Aula expositiva e de resolução de exercícios e problemas	Aritmética Intervalar
	1	Aula expositiva e de resolução de exercícios e problemas	Propagação de Erros
06-10 Out	1	Aula de resolução de exercícios e problemas	Propagação de Erros
	3	Tarefa 2 – Exploração	Equações não lineares
13-17 Out	2	Tarefa 2 – Discussão	Equações não lineares
	2	Aula expositiva e de resolução de exercícios e problemas	Equações não lineares
20-24 Out	2	Aula de resolução de exercícios e problemas	Equações não lineares
	2	Aula expositiva e de resolução de exercícios e problemas	Interpolação Polinomial
27-31 Out	2	Aula expositiva e de resolução de exercícios e problemas	Interpolação Polinomial
	2	Aula de resolução de exercícios e problemas	Interpolação Polinomial
03-07 Nov	2	1.º Teste de avaliação	Avaliação
	2	Tarefa 3 – Exploração	Ajuste Curvas
10-14 Nov	2	Tarefa 3 – Discussão	Ajuste Curvas
	1	Aula expositiva	Ajuste Curvas
17-21 Nov	2	Tarefa 4 – Exploração	Integração Numérica
	1	Aula de resolução de exercícios e problemas	Ajuste Curvas
24-28 Nov	1	Tarefa 4 – Discussão	Integração Numérica
	1	Aula expositiva	Integração Numérica
	2	Aula de resolução de exercícios e problemas	Integração Numérica
02-05 Dez	1	Aula de resolução de exercícios e problemas	Integração Numérica
	2	Aula expositiva e de resolução de exercícios e problemas	Equações Diferenciais
09-12 Dez	1	Aula de resolução de exercícios e problemas	Equações Diferenciais
	2	Aula de resolução de exercícios e problemas	Equações Diferenciais
15-18 Dez	2	2.º Teste de avaliação	Avaliação
	1	Balanço final da disciplina.	

Anexo 5 – Tarefas de investigação

Tarefa 1: *Intervalando*

Questão 1: Observe as seguintes situações

$$[1, 2] + [5, 7] = [6, 9]$$
$$[0, 1] + [-5, 2] = [-5, 3]$$
$$[-3, -1] + [1, 3] = [-2, 2]$$

1. O que pode dizer sobre o resultado de [-2, -1] + [-5, -1]? Explique como chegou a essa conclusão.

2. É possível deduzir uma regra que permita determinar a soma de dois intervalos de valores reais?

3. Investigue se todos os intervalos de valores reais seguem esta regra?

4. Investigue se a regra deduzida pode ser utilizada para outras operações com intervalos, por exemplo, a subtracção (X–Y), a multiplicação (X×Y) e a divisão (X/Y).

Questão 2:

Considere a função f: $D \subset IR \rightarrow IR$, real de variável real, definida por f(X) = X+X com X = $[x_1, x_2] \subset D$, um intervalo de valores reais pertencente ao seu domínio.

1. Se X = [2, 7], qual a sua imagem através da função f? Explique como chegou a essa conclusão.

2. O que pode afirmar na alínea anterior se a função f passar a ser definida por f(X) = 2X?

3. O que pode concluir sobre a imagem de um intervalo real qualquer, se a função f passar a ser definida por $f(X) = X^2$ ou por $f(X) = e^X$?

Questão 3:

Se um comprimento d mede 2 unidades com um erro e = ± 0,1, qual é o erro no resultado final se este for dividido por c = 1,2 que tem um erro f = ± 0,02.

Tarefa 2: E*quacionando*

Questão 1:

1. Considere a função $f(x) = \ln(x) - e^{-x}$. Como pode resolver a equação $f(x) = 0$?

2. Observe a seguinte sequência de intervalos de valores reais contendo a raiz de f,

[1,000; 2,000]
[1,000; 1,500]
[1,250; 1,500]
[1,250; 1,375]
[1,250; 1,313]
[1,281; 1,313]

a) Qual é o próximo elemento da sequência? Explique como chegou a essa conclusão.
b) Encontre uma regra geral para construir qualquer elemento da sequência apresentada?
c) Investigue quantos elementos a sequência precisa de ter para obtermos um intervalo com amplitude igual ou inferior a $0,5 \times 10^{-3}$.

Questão 2:

A velocidade de lançamento de um míssil a partir de um submarino é calculada através da fórmula $v = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$, onde v é a velocidade de lançamento na vertical, u é a velocidade de saída do combustível relativamente ao míssil, m_o é a massa inicial do míssil (t = 0), q é a taxa de consumo do combustível, g = 9,8 m/s^2 a aceleração da gravidade. Sabendo que u = 2200 m/s, m_o= 160000 Kg e q = 2680 Kg/s, ao fim de quanto tempo é atingida a velocidade de 1000 m/s?

Tarefa 3: *Ajuste de contas*

Questão 1:

Através de monitorização em três postos distintos, obtiveram-se alguns dados relativos à evolução de uma população de bactérias anaeróbias num lago, com os quais se pretende descrever matematicamente o crescimento da referida população.

Posto 1

t (horas)	2	3	4	5	6	8
p ($\times 10^5$)	90	140	----	240	----	390

Posto 2

t (horas)	1	2	3	4	5	6	8
p ($\times 10^5$)	40	85	----	220	210	----	400

Posto 3

t (horas)	2	3	4	5	6	7
p ($\times 10^5$)	85	140	----	250	380	600

1. Como pode verificar, houve falhas no registo correspondente a algumas horas. Como pode completar as tabelas?

2. Investigue quais os modelos matemáticos adequados para descrever a evolução da população de bactérias no período considerado (para cada posto).

Questão 2:

Considere agora os dados seguintes relativos à evolução de bactérias noutro local.

t (horas)	1	2	3	4	5	6	7
p ($\times 10^5$)	550	750	1000	1400	2000	2700	3750

Investigue qual dos modelos seguintes descreve melhor a referida evolução:

a) $y = 82x^2 - 139x + 650$ b) $y = 518x - 336$ c) $y = 392e^{0,3x}$

Questão 3:

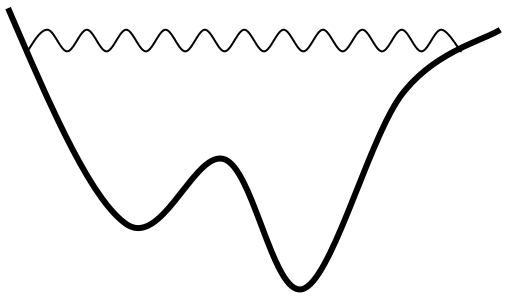
Suspeita-se que o tempo (minutos) até à falha de uma máquina (Y) esteja relacionado com a voltagem (Volt) em que a máquina opera (X). Para investigar a relação entre estas variáveis, planeou-se uma experiência com 8 máquinas similares, seleccionadas ao acaso, tendo-se obtido os resultados do quadro abaixo:

X	110	110	110	115	115	120	120	130
Y	2145	2155	2225	2212	2180	2260	2334	2340

Como pode descrever a relação entre estas duas variáveis X e Y?

Tarefa 4: *Águas paradas*

Na figura seguinte pode observar uma secção transversal de um rio que, em determinado local, tem uma largura máxima à superfície de 30 metros e uma profundidade que varia entre os 6 metros e os 15 metros.



1. Como pode obter um valor aproximado para a área da referida secção com uma exactidão da ordem dos 100 m^2?

2. É possível escrever uma fórmula indicando como encontrar uma aproximação para a área com qualquer precisão pré-determinada?

Anexo 6 – Guião de observação das aulas de realização de tarefas investigativas

1. Estrutura da aula

- Data, Turma, Duração
- Organização da turma
- Gestão da aula, momentos
- Acções da professora (descrição geral)

2. Exploração das tarefas

- **Duração** (o tempo foi suficiente?)
- **Papel/Reacções dos alunos** (qual o envolvimento nas tarefas? Necessitam de apoio? Que tipo de ajudas solicitam? Trabalham de forma autónoma? Todos contribuem de igual forma? Como interpretam o que é pedido? Vão formulando questões que procuram responder? Quais as estratégias de resolução que usam? Inventam procedimentos originais? Formulam conjecturas? Tentam convencer-se e convencer os outros da sua validade? Como? Tentam demonstrar as suas conjecturas? Como registam ou representam no papel aquilo que pensam? Como trabalham em grupo? Há partilha de ideias? Questionam as ideias dos outros? Defendem as suas próprias ideias? Que dificuldades surgem ao longo do trabalho?)
- **Papel da professora** (percorre toda a turma sequencialmente ou centra-se mais em alguns alunos ou grupos? Quando é que se dirige aos grupos? Dirige-se aos alunos/grupos só por solicitação destes? Interrompe pontualmente a actividade dos alunos para se dirigir a toda a turma? Coloca questões aos alunos ou simplesmente esclarece questões formuladas por eles? Que tipo de questões coloca aos alunos? Questões que desafiam o pensamento dos alunos? Questões esclarecedoras? Pede explicações e justificações para as ideias dos alunos? Que controlo exerce?)
- **Dificuldades** encontradas (coisas que ficam por fazer, consequências do prosseguimento, ou não, da aula)
- **Caracterização das tarefas** comparadas com as aulas usuais (o que se destaca das aulas com actividades de investigação? Quais os aspectos mais marcantes?)

3. Discussão final

- Duração (o tempo foi suficiente?)
- Objectivo (corrigir todas as questões? Esclarecimento das questões mais difíceis? Confronto de diferentes resoluções? Exploração adicional de algumas questões? Relacionar conteúdos? Proposta de novas questões?)
- O que surge de novo nesta fase do trabalho?
- Envolvimento dos alunos
- Acções da professora (descrição geral)

4. Impressões gerais

- O trabalho de preparação desta experiência é suficiente?
- A tarefa é adequada aos alunos?

5. Que balanço faço da aula?

Anexo 7 – Guião para a realização de um relatório

Durante o próximo semestre são propostas várias tarefas de investigação a realizar nas aulas de Análise Numérica, sobre as quais são solicitados relatórios. Estes relatórios deverão ser entregues nos prazos definidos pela professora e têm como objectivos:

1. Contribuir para a reflexão e uma melhor compreensão dos assuntos tratados nas aulas, por parte dos alunos;
2. Desenvolver a capacidade de comunicação escrita dando aos alunos oportunidade para apresentar os seus raciocínios e descobertas;
3. Permitir ao professor compreender melhor as dificuldades encontradas, as estratégias utilizadas e os resultados obtidos pelos alunos na realização das tarefas propostas;
4. Desenvolver o sentido crítico dos alunos para uma correcta avaliação do trabalho desenvolvido nas aulas, com vista ao seu futuro aperfeiçoamento.

Não obstante a forma pessoal de apresentação do relatório, este deve incluir uma descrição clara e completa do trabalho realizado. Assim, na elaboração de um relatório devem ter em conta, entre outros, os seguintes aspectos:

1. **Apresentação:** Título e objectivos do trabalho, incluindo as questões iniciais e identificação dos elementos do grupo.
2. **Exploração/Desenvolvimento:** Deverá conter uma descrição detalhada do processo de investigação (incluindo as primeiras decisões, passos sucessivos, questões que foram surgindo, explicitação de raciocínios e estratégias de resolução, resultados que foram obtendo...), ilustrada com os materiais entretanto produzidos (tabelas e/ou esquemas, esboços de gráficos, organização dos dados recolhidos...).
3. **Conclusões:** Síntese das descobertas mais significativas durante a realização da tarefa.

Os relatórios elaborados constituem elementos de avaliação e, como tal, são classificados numa escala de 0-20 e de acordo com uma tabela de descritores. Devem ter especial atenção aos seguintes aspectos:

1. Organização do trabalho;
2. Descrição e justificação dos procedimentos utilizados;
3. Correcção e clareza dos raciocínios;
4. Correcção dos conceitos matemáticos envolvidos;
5. Correcção e clareza da linguagem utilizada;
6. Criatividade.

Devem ainda incluir no relatório uma **apreciação crítica** da tarefa apresentada como base de trabalho (compreensão do contexto, se despertou interesse/agrado ou não, as dificuldades encontradas...) e uma **auto-avaliação** da participação e intervenção no trabalho realizado. Esta informação será utilizada apenas no trabalho de investigação pelo que não está sujeita a avaliação.

Anexo 8 – Avaliação dos relatórios das tarefas de exploração/investigação Tabela de Descritores

Dimensões Classificação	Conhecimento Matemático	Estratégias e Processos de Raciocínio	Comunicação
18-20	- Identifica objectivos - Inclui definições e conceitos matemáticos envolvidos na situação. - Usa terminologia e notação apropriadas. - Utiliza representações adequadas. - Executa completa e correctamente algoritmos.	- Usa conhecimentos e informação exterior relevantes para o trabalho. - Identifica as variáveis importantes na situação mostrando compreensão de relações entre elas. - Formula questões que orientam/viabilizam uma estratégia de investigação. - Leva a cabo processos de tentativa e erro de forma sistemática. - Formula conjecturas sobre padrões ou relações. - Procura generalizar a partir da experimentação de casos particulares. - Enuncia uma regra geral e tenta demonstrá-la.	- Trabalho bem apresentado. - Descrição/explicação completa, bem organizada e relevante. - Inclui diagramas e exemplos elucidativos e apropriados para a situação. - Comunicação cuidada e muito eficaz.
14-17	- Identifica objectivos. - Inclui definições e conceitos matemáticos envolvidos na situação. - Usa quase correctamente terminologia e notação apropriadas. - Utiliza representações correctas mas nem sempre adequadas. - Executa algoritmos que podem conter erros de cálculo.	- Usa alguns conhecimentos e informação exterior relevantes para o trabalho. - Identifica as variáveis importantes na situação mostrando compreensão de relações entre elas. - Formula algumas questões que orientam/viabilizam uma estratégia de investigação. - Leva a cabo processos de tentativa e erro de forma sistemática. - Formula conjecturas sobre padrões ou relações. - Procura generalizar a partir da experimentação de casos particulares. - Tenta enunciar uma regra geral.	- Trabalho bem apresentado. - Descrição/explicação completa e organizada. - Inclui alguns diagramas elucidativos e apropriados para a situação. - Comunicação, no geral, eficaz.

(continua)

Dimensões Classificação	Conhecimento Matemático	Estratégias e Processos de Raciocínio	Comunicação
10-13	- Identifica algum objectivo. - Inclui algumas definições e conceitos matemáticos envolvidos na situação. - Usa terminologia e notação nem sempre correctas. - Utiliza representações com algumas incorrecções. - Executa algoritmos que apresentam erros de cálculo.	- Usa conhecimentos e informação exterior com alguma relevância para o trabalho. - Identifica algumas variáveis importantes na situação mas mostra compreensão limitada de relações entre elas. - Procura generalizar a partir da experimentação de casos particulares mas este processo pode estar incompleto ou pouco sistematizado.	- Apresentação razoável. - Descrição/explicação satisfatória mas incompleta e desorganizada. - Argumentação incompleta ou baseada em premissas pouco importantes. - Inclui alguns diagramas pouco claros ou precisos. - Comunicação, no geral, difícil de interpretação.
6-9	- Não identifica objectivos. - Mostra uma compreesão muito limitada dos conceitos matemáticos envolvidos na situação. - Troca ou falha o uso dos termos matemáticos. - Executa algoritmos com erros graves de cálculo.	- Não usa conhecimentos e informação exterior ou quando usada, é irrelevante. - A estratégia de procura de padrões ou relações é inadequada ou é difícil de identificar.	- Apresentação razoável. - Descrição/explicação incompleta ou incorrecta. - Argumentação incompleta ou baseada em premissas pouco importantes. - Inclui diagramas pouco claros ou incorrectos. - Comunicação difícil de interpretação.
≤ 5	- Não identifica objectivos. - Mostra não compreender os conceitos matemáticos envolvidos na situação. - Não executa algoritmos.	- O trabalho relatado, se existente, é inadequado e/ou irrelevante.	- Apresentação fraca. - Descrição/explicação incompleta ou incorrecta. - Argumentação incompleta e incorrecta. - Não inclui diagramas ou se os apresenta não representam de todo a situação. - Comunicação muito confusa.

Anexo 9 – Categorias de análise de dados

Categorias de análise para o trabalho com representações matemáticas (Duval, 2006)

Representação Discursiva	• Linguagem natural (associações verbais, argumentos a partir de observações • Sistemas de notação (numérico, simbólico, algébrico)
Representação não Discursiva	• Figuras geométricas • Gráficos cartesianos

Categorias de análise para a exploração de tarefas de investigação (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003)

Processos matemáticos	Estratégias
Procura de regularidades	• Observação directa dos dados • Manipulação dos dados
Formulação de questões	• De forma explícita ou • Na formulação de conjecturas
Formulação de conjecturas (generalização, reformulação, refinamento)	• Observação directa dos dados • Recorrer a contra-exemplos • Investigação casos extremos • Manipulação dos dados • Identificação de padrões • Experimentação de casos • Investigação de casos extremos • Analogia • Formulação implícita • Utilização de linguagem/escrita formal
Teste de conjecturas	• Experimentação casos • Representações gráficas • Definições e propriedades matemáticas
Justificação de conjecturas	• Definições e propriedades matemáticas a) usa linguagem natural b) usa linguagem formal • Raciocínio lógico e dedutivo (argumentos matematicamente válidos)

Categorias de análise para a resolução de problemas
(Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985a)

Fase	Heurísticas
Compreender o problema	• Identificar os dados • Identificar a questão • Organizar a informação • Exemplificar • Exprimir noutros termos
Estabelecer um plano (planeamento e exploração)	• Simplificar • Estimar • Procurar regularidades com vista a uma generalização • Reconhecer padrões • Tentativa e erro • Considerar problemas equivalentes (modifica o problema) • Argumentar por contradição • Assumir uma solução • Partir do que se sabe • Planificar hierarquicamente a solução • Trabalhar de trás para a frente • Decompor o problema • Dedução lógica • Explorar problemas similares • Conjecturar • Esquematizar • Análise exaustiva de casos • Investigar casos extremos
Executar o plano	• Registar cálculos • Usa destrezas computacionais (uso da calculadora quando apropriado) • Usa destrezas algébricas • Usa destrezas geométricas • Realçar os logros intermédios • Actuar com ordem e precisão • Explicar o estado da execução • Explora várias ideias
Verificar/justificar	• Analisar a consistência da solução (verifica o resultado, responde à questão, a resposta confere com o esperado) • Exprimir a solução de outra forma • Analisar a consistência do processo • Analisar se pode chegar ao mesmo resultado de outra maneira • Generalizar

Recursos (Conhecimentos requeridos):
- Conhecimento informal e intuitivo
- Factos e definições
- Procedimentos de rotina
- Regras do discurso

Controlo: Rol de decisões com vista à selecção e implementação de recursos e estratégias. As decisões influenciam a solução pois determinam a eficiência do processo. Tomam decisões e voltam atrás.

Crenças e Afectos :
- Origem social (o que é comum pensar-se sobre a Matemática)
- Experiência como aluno (tipo de ensino recebido na sala de aula)